Musik und Informatik
- ein Brückenschlag

von

Werner Zorn

Fassung 25. März 1988

Vorwort

Musik und Informatik - was hat denn dies miteinander zu tun? - wird sich angesichts des Titels mancher erstaunt fragen.

Ganz einfach: Musik ist Information und Informatik ist die Wissenschaft von der Informationsverarbeitung; beide gehören von Natur aus also ganz nahe zueinander.

Ganz so einfach, wie es sich hier schreibt, ist es natürlich in der Praxis nicht. Denn Musiker sind sensible Künstler, kontemplative oder schöpferische Ästheten und Sinnesmenschen, während Informatiker von Hause aus nüchterne Theoretiker oder Techniker sind, formal und amusisch, also eigentlich die geborenen Antitypen. Trotzdem zieht es viele Informatiker zur Musik hin, wenn auch meist zur Entspannung und nicht, um sich erneut in Arbeit zu stürzen. Mancher Musiker hat hingegen schon die technischen Errungenschaften der Informatik genutzt , ohne jedoch zu ahnen, welche übergreifende Wissenschaft sich dahinter verbirgt.

Spätestens, seit Hofstadters "Gödel - Escher - Bach" als Bestseller in viele Bücherschränke eingezogen ist, weiß ein breiteres Publikum, daß es Querbeziehungen zwischen Mathematik, Malerei und Musik gibt und daß es offensichtlich die Informatik ist, die das sich durchziehende "endlose, geflochtene Band" in den Händen hält.

Leider ist jedoch anzunehmen, daß dieser Bestseller, wie so mancher andere, von seinen interessierten Besitzern nicht von vorn bis hinten durchgelesen wurde, so daß viele Erkenntnisse, Ideen und Anregungen in den nämlichen Bücherschränken ruhen und die potentiellen Empfänger gar nicht erreichen. Fairerweise muß man jedoch auch sagen, daß es selbst für einen Fachkundigen nicht ganz einfach ist, diesen Stoff gerade so beim Durchlesen zu verstehen, geschweige denn, alle Fingerzeige konkret umzusetzen.

Die vorliegende Schrift bemüht sich demgegenüber, nicht das Band weiter zu flechten, sondern eine Brücke zu schlagen und dies auf möglichst geradem Weg. Erreicht werden sollen darüber die Musiker im allgemeinen und die musikwissenschaftlich Interessierten im besonderen, welche bereit sind, die Brücke wenigstens ein Stück weit zu begehen. Um dieses nicht unnötig zu erschweren, wird versucht, auf Formalismen der Informatik so weit als möglich zu verzichten und alle Zusammenhänge sooft es irgend geht, durch Beispiele zu veranschaulichen.

Falls ein Informatiker diese Ausführungen in die Hand bekommen sollte, wird er über weite Strecken Wohlbekanntes wiederfinden. Vielleicht werden ihm aber auch einige musikalische Ausprägungen vertrauter Strukturen bewußter werden und ihn zum Nachdenken anregen.

Da die vorliegende Schrift hauptsächlich für Musiker gedacht ist, bin ich natürlich am meisten gespannt auf deren Meinung, wobei ich durchaus damit rechne, daß diese eher zurückhaltend, wenn nicht sogar zurückweisend ausfallen könnte. Jeder kritische Gedankenaustausch wäre jedoch bereits die Mühe wert gewesen, die folgenden Seiten geschrieben zu haben und jede positive Anregung wird mich zusätzlich motivieren, daran weiterzuschreiben.

Karlsruhe, März 87 Werner Zorn

Inhaltsverzeichnis

1. Motivation, Zielsetzung

Seit längerer Zeit bewegen mich eine Reihe von Fragen beim Hören und beim praktischen Umgang mit der Musik, auf die ich zunächst mehr beiläufig, dann zunehmend systematisch nach einer Antwort suchte. Die wichtigsten Fragen dabei sind:

- Wie lassen sich musikalische Strukturen, die der Zuhörer offenbar mühelos zu analysieren in der Lage ist, adäquat, möglichst sogar anschaulich darstellen?

- Wie kommt es, daß man, insbesondere in der klassischen Musik, oft das Gefühl hat, die Fortführung eines musikalischen Gedankens schon zu wissen oder zu ahnen, auch wenn man diesen noch nie gehört hat?

- Was bewirkt eigentlich, daß man die eine Struktur als ausgewogener und damit als schöner empfindet, als eine andere, die sich vielleicht nur geringfügig unterscheidet?

- Auch wenn die Musik ihrer Natur nach dynamisch ist, stellt sich die Frage, ob diese nicht aus einer statischen Struktur abgeleitet werden kann. - So, wie wenn ein Betrachter um eine Skulptur herumgeht, und sie von verschiedenen Seiten betrachtet, um sie ganz zu verstehen.

- Wie läßt sich mit Hilfe von Strukturinformation nicht nur ein besseres Verständnis, sondern zusätzlich auch eine starke Informationsreduktion z.B. für den interpretierenden Musiker erreichen ?

Schon oft habe ich manche Künstler wegen ihres immensen Repertoires bewundert: Georg Solti, der nahezu alle Orchesterwerke aufgeführt hat, Claudio Arrau, der fast die gesamte klassische Klavierliteratur gespielt hat, Dietrich Fischer Dieskau, der neben seiner Gesangspartie noch das gesamte musikalische Umfeld beherrscht, um nur drei der ganz Großen zu nennen.

Wie kann diese immense Informationsmenge erarbeitet, aufbereitet, gespeichert und wiederauffindbar gemacht werden? Trotz der enormen Speicherkapazität des menschlichen Gehirns von 10^{10} Bit (dies entspricht 25 Enzyklopädien) weiß man, daß selbst bei höchster Intelligenz nur ein Bruchteil zur direkten Speicherung genutzt wird. Es muß selbst bei größten menschlichen Erinnerungsvermögen effizientere Methoden der Musikwidergabe geben, als diejenige, abgespeicherte Tonfolgen sequentiell abzurufen und auf dem dafür bestimmten Instrument auszugeben.

Ich habe in meinem Leben oft vor dem Schnelldrucker eines Computers gestanden und zugeschaut, wie schier endlose Zahlenkolonnen ausgedruckt wurden, ungeduldig auf das Ende des Druckvorgangs wartend.

Wozu dieses Beispiel hier? Ich will natürlich nicht das Musizieren mit einem so profanen Vorgang wie der Ausgabe auf einem Schnelldrucker gleichsetzen. Eine nachdenkenswerte Analogie gibt es jedoch: Hinter den erwähnten endlosen Zahlenreihen steht ein Algorithmus in Gestalt eines Programms, welches diese Zahlenreihen produziert und in aller Regel nicht etwa nur eine Routine zur Ausgabe bereits vorher abgespeicherte Werte. Nehmen wir zwei einfache Beispiele. Die Gleichung

$$y = x^2 \tag{1. 1}$$

stellt eine einfache Parabel dar, die Gleichung

$$y = \sin(x) \tag{1. 2}$$

eine Sinusfunktion.

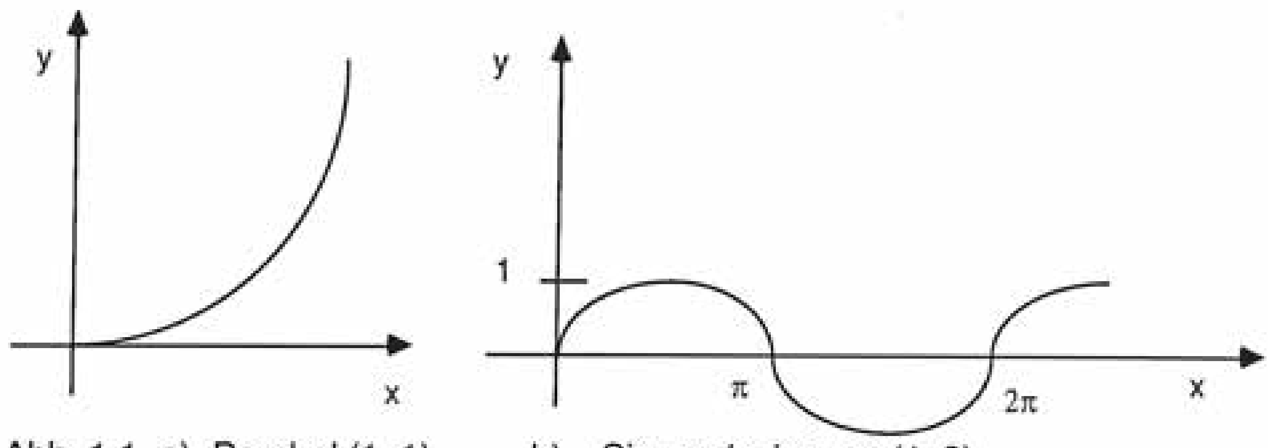


Abb. 1.1 a) Parabel (1. 1) b) Sinusschwingung (1. 2)

Die mathematischen Gleichungen sind sehr einfach, die graphische Darstellung sehr anschaulich, während die punktweise Berechnung der Funktion eine beliebig mühsame Sache sein kann.

Wie sieht nun die Analogie zur Musik aus: Hierzu wollen wir uns folgendes Beispiel ansehen [LeiGi 31]:

Abb. 1. 2.: Anfang einer Etüde aus [LeiGi 31]

Die vereinfachte Funktion für die ersten beiden Takte des oberen Systems lautet:

(1. 3) Sextenlauf abwärts (C-Dur)

Dieser läßt sich sehr leicht aus dem Notentext ableiten.
In [LeiGi 31] heißt es zur Analyse der vollständigen Etüde:

> "Durch diese Reflexion, dies Durchdenken des Stückes, wird jeder in der Lage sein, die ganze Etüde aufzuschreiben, er wird sie also gedächtnismäßig völlig beherrschen. Die meisten meiner Schüler waren bei intensiver Konzentration fähig, die ganze Etüde n a c h w e n i g e n M i n u t e n o h n e N o t e n , also aus dem Gedächtnis z u s p i e l e n . Sie waren alle höchst erstaunt, daß dies möglich war."

Wie hängt das musikalische Beispiel mit den mathematischen Beispielen zusammen?

Betrachten wir zwei Beispiele zum Vergleich:

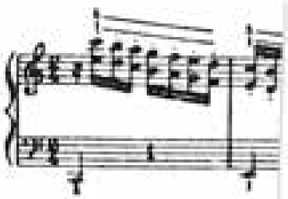
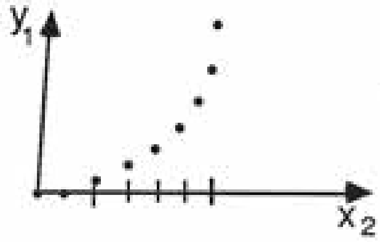
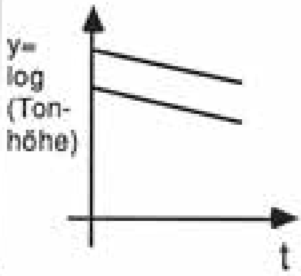
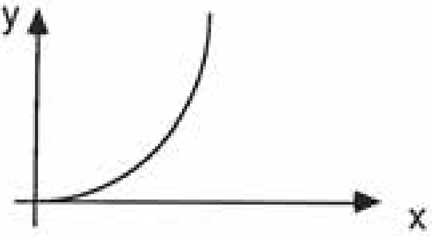
<table>
<tr><th></th><th>Etüde (1. Takt)</th><th>Parabel</th></tr>
<tr><td>Funktion</td><td>Sextenlauf abw.
(C - Dur)</td><td>$y = x^2$</td></tr>
<tr><td>Diskrete Darstellung</td><td></td><td>
<table>
<tr><th>x_i</th><th>y_i</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4</td><td>16</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Kontinuierliche Darstellung</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Abb. 1.3: Gegenüberstellung mathematischer und musikalischer Repräsentationen

Zunächst muß man beachten, daß es sich im musikalischen Beispiel um einen Analysevorgang handelt, welcher ausgehend von der diskreten musikalischen Notation des Endergebnisses quasi rückwärts die zugrunde liegende Funktion ermittelt. Hierbei kommt dem Analytiker aufgrund der Notationsart zugute, daß er auch in der diskreten Darstellung bei entsprechenden Vorkenntnissen sehr schnell die Gesetzmäßigkeit erkennt.

Er erkennt natürlich noch sehr viel genauer als in der groben, funktionalen Beschreibung (1. 3), von wo bis wo, wie schnell, auf welche Taktteile und mit welcher Dynamik etc. die Sexten zu spielen sind. Wir können jedoch, um dies zu berücksichtigen, die Beschreibung weiter verfeinern und noch unterscheiden zwischen der formalen Funktion

(1.4)Sextenlauf (Richtung, Tonart, oberer Anfangston, Endton, Notenwert, Takt, Anfangstaktteil, Phrasierung, Lautstärke)

und dem aktuellen Auftreten

(1.5) Sextenlauf (abwärts, C -Dur, c''', c', 4/4, 11/16, gebunden, ad lib.).

Wir wollen diese Eigenschaften im folgenden allgemeine Attribute, oder im Falle einer technischen Realisierung auch Parameter nennen.

Es mag unterschiedliche Arten geben, solche funktionalen Beschreibungen vorzunehmen und natürlich auch aus der Komposition abzuleiten. Arthur Rubinstein erfreute sich eines nahezu photographischen Gedächtnisses, welches ihn in den Stand versetzte, quasi ohne Noten vom Blatt zu spielen [Ru76]. Helmut Walcha, seines Augenlichts seit Jugendzeit beraubt, läßt sich die Stimmen z. B. eines mehrstimmigen Chorals einzeln vorspielen und "komponiert" selbst daraus anschließend nochmals das Gesamtstück. Michael Ponti, mit dem ich die Freude habe, befreundet zu sein , stützt sich mit seinem gigantischen präsenten Repertoir weitgehend auf ein akustisches Gedächtnis. Andere verfügen über ein mehr motorisches Gedächtnis.

Allen genannten Methoden, mit Ausnahme der motorischen, ist gemeinsam, daß sie, mit welcher Assoziation auch immer, den jeweiligen musikalischen Ausdruck bewußt machen, wenn er gespielt wird. Wie auch immer der Ausdruck im Bewußtsein des einzelnen Künstlers formuliert ist, es könnten mit Sicherheit die einzelnen Attribute der Funktionen von ihm abgefragt werden.

Demgegenüber unterstützt das motorische Gedächtnis keine Bewußtmachung übergreifender Strukturen. Es läßt sich eher mit einer "flachen", sequentiellen Ausgabe eines bereits vollständig abgespeicherten musikalischen Textes auf dem genannten Schnelldrucker vergleichen. Dies soll nicht als Abwertung des motorischen Gedächtnisses verstanden werden, sondern als Versuch einer Einordnung.

Betrachten wir hierzu nochmals die Beispiele (1.1) bis (1.3):

In der Gleichung

(1.1) $y = x^2$, bzw. (1. 2) $y = \sin(x)$

sind wir stillschweigend davon ausgegangen, daß die Funktion "Quadrieren", bzw. die "Sinus - Funktion" als Elementaralgorithmus existiert und nicht näher erläutert werden muß. Sollte jedoch jemand diese Funktion nicht kennen, so müßte dieser mühsam rechnen:

$$(1.1) \qquad y = \underbrace{x + x \ldots + x}_{x\text{ - mal}}$$

bzw.

$$(1.2) \qquad y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

In einer ähnlichen Situation ist jemand, der den Algorithmus "Sextenlauf" nicht beherrscht, sondern ihn Note für Note

(1.3) Sextenlauf abwärts (C - Dur) = ((c''', e''), (h'', d''), ...)

ermitteln muß.

Das motorische Gedächtnis besitzt also im Gegensatz zum visuellen, kompositorischen oder akustischen die Fähigkeit, komplizierte musikalische Funktionen in Form von Elementaralgorithmen zu realisieren, ohne daß deren Ausführung im einzelnen noch bewußt gemacht werden muß. Je geübter ein Musiker ist, umso mehr solcher Elementaralgorithmen wird er beherrschen und diese auch angesichts eines Notentextes aktivieren können. Die Fähigkeit des Menschen, unterschiedliche graphische Strukturen optisch zu erfassen und zu erkennen, ist bei entsprechender Schulung erstaunlich groß. Manche chinesischen Gelehrten beherrschen 30 000 Schriftzeichen und mehr, während ein normaler Abiturient es immerhin auf 3 000 bis 5 000 bringt.

Sinn dieser Betrachtung ist es nicht etwa, wie irrtümlich angenommen werden könnte, die Besonderheiten der verschiedenen Gedächtnisformen zu behandeln, sondern festzustellen, daß es komplexe musikalische Grundstrukturen gibt, die durch einfache Ausdrücke beschrieben werden können, wobei einem jeden solchen Ausdruck beim ausführenden

Musiker ein Elementaralgorithmus entspricht, der ohne weiteres ausgeführt werden kann. Diese Abstraktion von der einzelnen Note zu komplexen Strukturen, ohne daß hierdurch der Bezug zur Einzelnote verloren geht ist ein wichtiger Schritt zu der späteren formalen Beschreibung.

Die bisherigen Überlegungen sind sicher nicht überraschend, auch wenn sie sich zuweilen eines in der Musik wenig üblichen Vokabulars bedienen. Sie führt direkt zu den in der Musikanalyse wohlbekannten Darstellungstechniken, wie sich ein Beispiel in Abb. 1.4 findet [Mi 85].

Abb.: 1. 4: Struktur der Mozart - Kleine Sonate C-Dur, KV 545, 1. Satz nach [Mi 85]

Diese Darstellung sei ein wenig umgeformt und man erhält z. B. folgenden Strukturbaum:

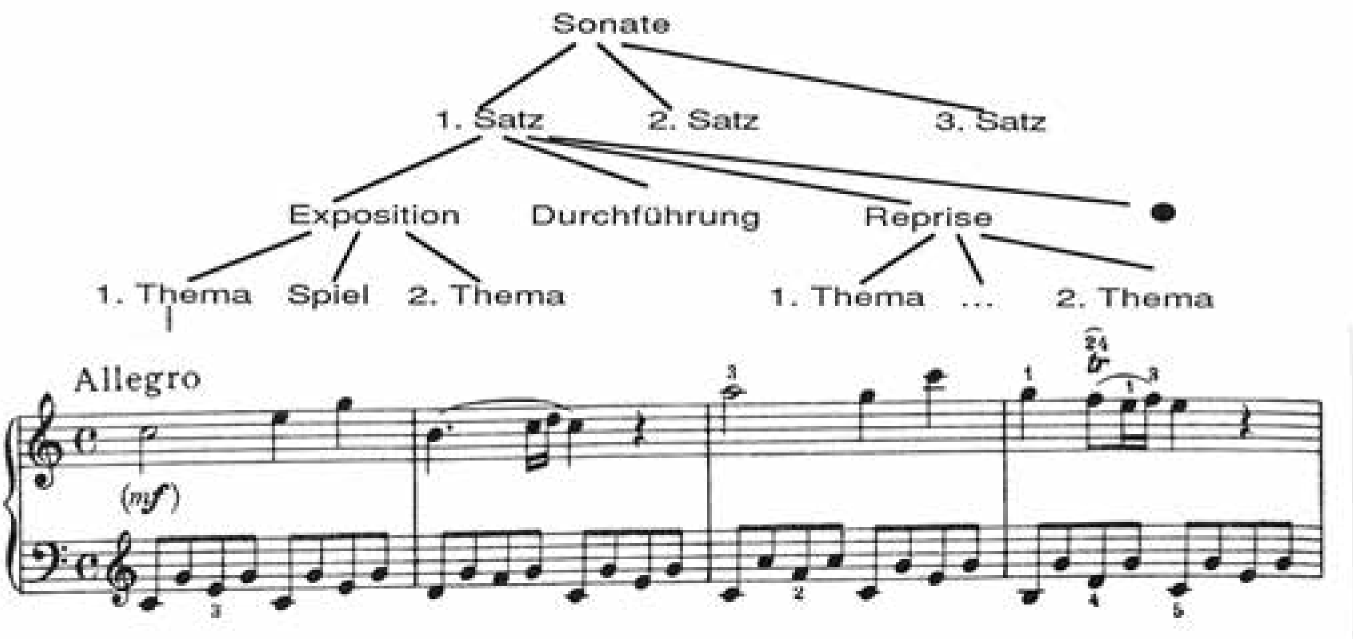


Abb.: 1. 5: vereinfachter Strukturbaum für die Mozart-Sonate C-Dur, KV544 (oder eine andere)

Nachdem man diese Struktur als Ergebnis eines z.T. mühsamen Analysevorgangs gewonnen hat, kann man mit ihrer Hilfe zahlreiche Eigenschaften des betrachteten Werkes besser beschreiben, als dieses durch flüchtiges Hören oder durch direktes Inspizieren des Basistextes möglich ist.

Man erkennt z.B.

- 1. Thema, 2. Thema

- Modulationen, Sequenzen

- Übergeordnete Strukturen
    - Exposition
    - Durchführung
    - Reprise

- innere Gesetzmäßigkeiten

u. v. a. m.

Man kann sich quasi vor das Stück als ganzes stellen, und es nach beliebigen Richtungen hin betrachten: vorwärts, rückwärts, aufwärts, abwärts.

In ([Mi 85] S. 371) heißt es hierzu:

> "**Zeiterlebnis**
>
> Die Ganzheit ist in der Vorstellung faßbar, in der Erinnerung des Hörers, im Vorausdenken des Komponisten oder Interpreten. Die Klassiker bezeugen mehrfach, daß sie vor dem Hinschreiben eine Komposition als Ganzes im Kopf haben, also ohne Zeitablauf, anschaubar, aber nicht als erstarrte Architektur oder skelettartig, sondern lebendig."

Die Frage, die sich angesichts einer solchen Struktur bei weiterer Überlegung stellt, ist jedoch, was diese denn eigentlich überhaupt bedeutet:

- gibt sie die Komposition "an sich" , in ihrer statischen Struktur wieder?

- Stellt sie den gedanklichen Entwurf der Komposition vor dem Niederschreiben des Notentextes dar?

- Welche dieser Strukturen und ggfls. in welcher Reihenfolge durchläuft der Interpret diese in Gedanken bei der Wiedergabe des Stückes?

- Welche Strukturen werden schließlich beim Hörer assoziiert?

Sind es in allen Fällen die gleichen Strukturen, oder sind sie ganz unterschiedlicher Natur. Ist die Struktur am Ende nur ein Hilfsmittel des außenstehenden Analytikers, welcher sich einer anderen Darstellungsform bedient, um sich selbst etwas klarzumachen?

Mit diesen Fragen werden sich die folgenden Kapitel beschäftigen und versuchen, Antworten zu geben.

2. Theoretische Grundlagen

2. 1. Linguistik

2. 1. 1 Strukturbäume

Bei der Betrachtung der in Abb 1. 5 dargestellten Strukturbaums einer Mozart - Sonate und bei näherem Nachdenken über dessen Konstruktion wird man sich alsbald des Grammatikunterrichts in der Schule erinnern, bei dem eine häufige Ausgabe darin bestand, zu einem vorgegebenen Satz einer Sprache die zugehörige syntaktische Struktur zu finden.

Abb 2.1 zeigt ein einfaches Beispiel [AuTü 70]

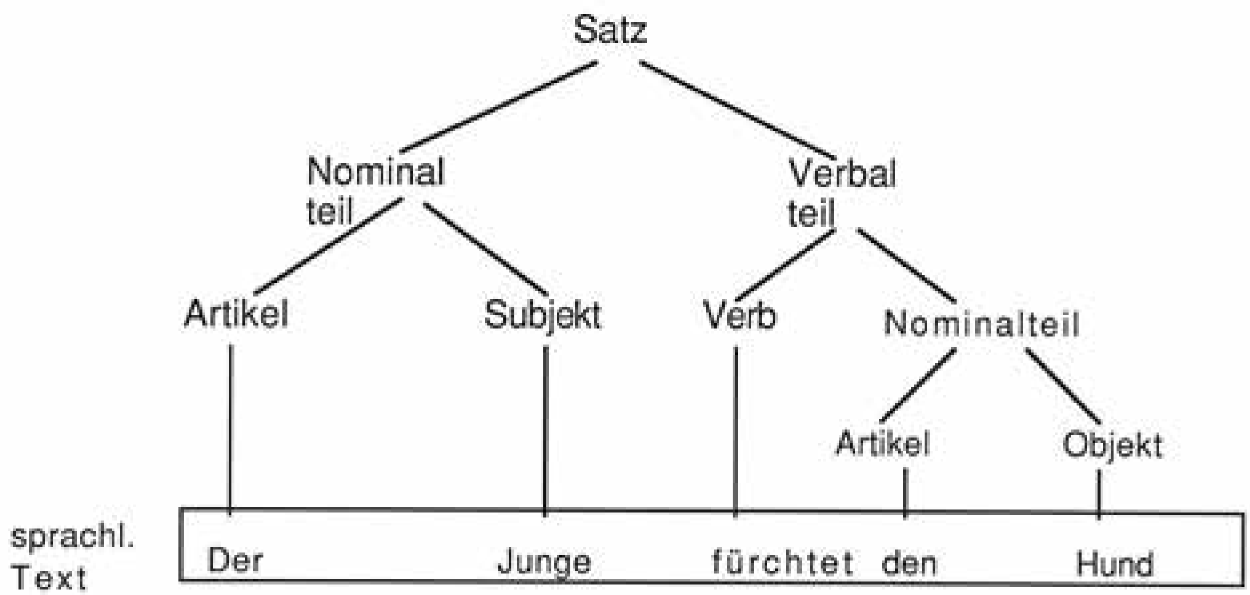


Abb. 2. 1: Strukturbaum eines deutschen Satzes

Ein solcher Strukturbaum wird auch *Syntaxbaum* genannt, da er den syntaktischen Zusammenhang der einzelnen Sprachelemente widergibt.

Beim Vergleich der Strukturen von Abb. 1. 5 und Abb. 2. 1 stellt man sehr leicht folgende Gemeinsamkeiten fest:

- Es handelt sich in beiden Fällen um eine streng hierarchische Struktur.
- Den einzelnen Textelementen werden auf der nächsthöheren Schicht *metasprachliche* Elemente zugeordnet, die von den zugrundeliegenden Inhalten abstrahieren und deren syntaktische Funktion angeben.
- Die metasprachlichen Elemente besitzen ihrerseits wieder eine syntaktische Funktion, die durch die nächsthöhere Schicht beschrieben wird.
- Dies setzt sich solange fort, bis die Spitze der Struktur erreicht ist.

Die so abgeleitete Struktur gibt damit ein allgemeines Schema für die Konstruktion bestimmter syntaktisch korrekter Sätze einer Sprache an. Diese Struktur ist dabei invariant gegenüber zahlreichen Veränderungen, z. B. des Austausches von Textelementen durch syntaktisch gleichwertige.

Daß hierbei semantisch, d.h. ihrer Bedeutung nach, unsinnige Sätze entstehen können, sei dabei unerheblich.

Überprüfen wir zunächst noch einmal die gewählte Analogie zwischen Musik und Sprache auf Plausibilität, bevor wir dem eingeschlagenen Pfad weiter folgen:

Gattung / Vorgang	Musik	natürliche Sprache
Formulierung	Komponist	Dichter
Wiedergabe	Interpret	Vorleser
Wahrnehmung	Zuhörer	Zuhörer

Tab. 2. 1 Einfache Analogie zwischen Musik und natürlicher Sprache

Diese Gegenüberstellung mag auf den ersten Blick trivial erscheinen, die Trivialität ist jedoch schlagartig beseitigt, wenn wir nicht mehr sagen

"Musik ähnelt einer Sprache"

sondern behaupten

"Musik ist eine Sprache"

Obwohl die Redewendung von der "Sprache der Musik" häufig angewendet wird, werden wir bei genauerem Hinsehen und im Verlaufe dieser Abhandlung noch feststellen, daß wir unseren Umgang mit der Sprache und mit der Musik als doch so grundsätzlich unterschiedlich empfinden, daß wir zunächst gar nicht auf die Idee kommen, es könne sich hierbei vielleicht nur um relativ geringfügige Varianten eines sehr viel allgemeineren Phänomens handeln.

2. 1. 2 Sprachelemente

Eine Sprache besteht allgemein aus

- Alphabet
- Grammatik
- Semantik.

Betrachten wir zunächst einmal das Alphabet und veranschaulichen dies anhand von Beispielen.

Während wir üblicherweise unter Alphabet die Buchstaben

A ......Z
a......z

und ggfs. Umlaute verstehen, enthält das Alphabet einer Sprache allgemein alle zulässigen Zeichen, also auch

Ziffern: 0......9
Interpunktionszeichen: , ; ? ! - ...
Sonderzeichen % $ " " ( ) ...

und sogar das

Leerzeichen

Aus diesem verallgemeinerten Alphabet, welches man deswegen auch *Zeichnvorrat* nennt, lassen sich Zeichenreihen bilden. Diese nennt man auch *Worte*, wobei umgangssprachlich die Gesamtheit aller zugelassenen Worte als *Vokabular* bezeichnet wird. (Formalsprachlich handelt es sich dabei immer noch um Worte).

Aus Worten können *Sätze* gebildet werden, wobei diese nicht nur syntaktisch korrekt sein müssen. Sinnlose Aneinanderreihungen von Worten wollen wir also nicht als Satz bezeichnen. Alle möglichen solchen sinnvollen Sätze einer Sprache nennt man auch *Sprachschatz*.

Welche Ausprägungen gibt es hierfür in der musikalischen Sprache? Leonard Bernstein diskutiert in seinen Harvard - Vorlesungen [Be 85] unterschiedliche Analogien:

Musik	Sprache
Note	Buchstabe
Tonleiter	Alphabet

Musik	Sprache
Note	Phonem
Motiv, Thema	Morphem
Phrase	Wort
Satzteil	Nebensatz
Satz	Satz
Musikstück	Prosastück

Tab. 2. 2 Beispiele für Analogien zwischen Musik und Sprache [Be 85]

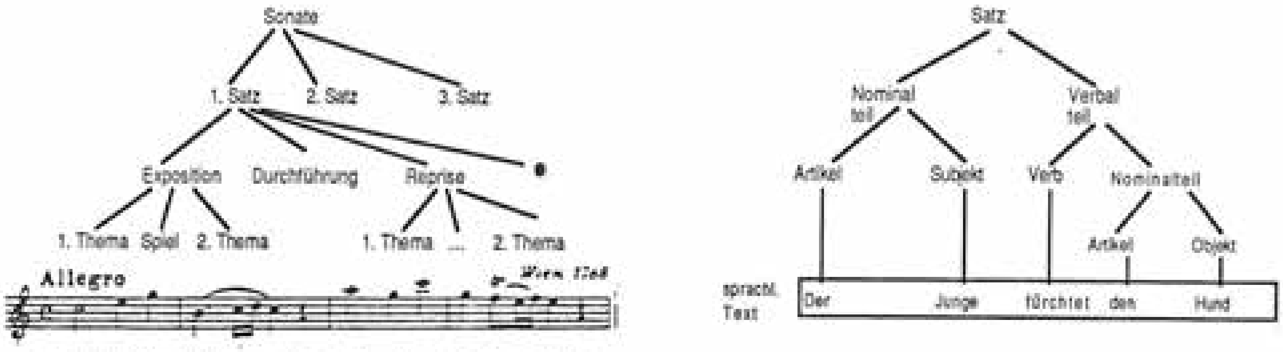
Bernstein behandelt diese Analogie ausführlich und zeigt insbesondere die Problematik verschiedener Bildungen von zusammengehörigen Begriffspaaren auf. Er kommt schließlich zu dem fast tautologisch anmutenden Zwischenergebnis

"Ein Satz (in der Musik) ist ein Satz (in der Sprache)",

während alle übrigen Vergleiche letztendlich mißlingen, d. h. durch ein geeignetes Gegenbeispiel widerlegt werden.

Diese Feststellung mag ernüchternd oder vielleicht sogar deprimierend erscheinen. Sie ist in ihren Folgerungen im Gegenteil sogar faszinierend, wie weiter unten gezeigt werden wird, und läßt sich sogar ohne diese Folgerungen zunächst aus dem bisher Behandelten verstehen:

Betrachten wir noch einmal die Strukturbäume in den Abb. 1. 5 und Abb.2.1,



a): vereinfachter Strukturbaum für die Mozart-Sonate C-Sonate, KV545 (oder eine andere)(Abb. 1. 5)

b): Strukturbaum eines deutschen Satzes (Abb. 2. 1)

Abb. 2. 2: Gegenüberstellung musikalischer und natürlichsprachlicher Strukturbäume

so stellt der Satz sowohl in der Musik als auch in der Sprache die erste klar abgrenzbare syntaktische Struktur dar, erkennbar (zumeist) an einem Ende- Zeichen. Alle übrigen darunter liegenden syntaktischen Strukturen sind bei erster Betrachtung willkürlich zu nennen. Allenfalls könnte man die darüberliegende Struktur auch im Spruchbeispiel (Abb. 2. 1) noch vervollständigen und dann nach Bernstein die Feststellung treffen:

"Ein Stück ist ein Stück".

Wir wollen jedoch zunächst möglichst allgemein bleiben und können folgendes festhalten:

	Musik	Sprache (natürliche)
geschlossene syntaktische Einheit	existiert	existiert (und heißt Satz)
Vokabular	?	festgelegt (und heißt Worte)
Alphabet	Noten, Sonderzeichen Pausen	Buchstaben, Ziffern, Sonderzeichen Zwischenräume

Tab. 2. 3. : Gegenüberstellung von musikalischen und natürlichsprachlichen Sprachelementen.

Das "?" - Zeichen in der Zeile "Vokabular" wird und später noch ausführlich beschäftigen.

2. 1. 3 Grammatiken

2. 1. 3. 1 Formale Definition

Formal läßt sich eine Grammatik definieren als 4 - Tupel

$$G = (T, N, P, S)$$

wobei

$$\left.\begin{array}{ll} T = & \text{Menge der Terminale} \\ N = & \text{Menge der Nichtterminale} \end{array}\right\} \text{Zeichenvorrat}$$

$$N \cap T = \{\}$$

$$P = \quad \text{Menge der Ableitungsregeln}$$

$$l \text{ -> } r \qquad l, r \in (N \cap T)^{+} \qquad \text{(s.u.)}$$

$$S = \quad \text{Startsymbol}$$

$$S \in N$$

[Ba Co 79].

In unserem Beispiel der Mozart - Sonate wäre

$$G_m = (T, N, P, S)$$

wobei

T = c, dis, d..., 𝄽, 𝄾, 𝄿..., 𝄐, 𝄇 ...

N = {Sonate, 1. Satz, 2. Satz, 3. Satz, Exposition, Durchführung, Reprise, 1. Thema, Spiel, 2. Thema}

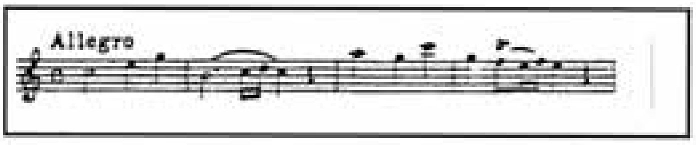
S = Sonate

P =

Sonate -> 1. Satz 2. Satz 3. Satz

1. Satz -> Exposition Durchführung Reprise

Exposition -> 1. Thema Spiel 2. Thema

1. Thema -> 

Durchführung ->

Reprise ->

Wenn wir diese Produktionsregeln mit dem Strukturbaum in Abb. 1.5 vergleichen, so stellen wir fest, daß diese gerade die Regeln für die Konstruktion des Baumes angeben, beginnend mit dem

Startsymbol "Sonate"

als der Spitze und endend mit den

Terminalsymbolen des Notentextes

als Basis. Natürlich hätte man die Ableitungsregeln nicht nur vervollständigen, sondern auch noch weiter verfeinern können, z. B. das 1. Thema noch in einzelne Motive zerlegen können:

1. Thema -> 1. Motiv 2. Motiv

1. Motiv -> Notentext

2. Motiv -> Notentext.

Bevor wir jedoch die musikalischen Anwendungen weiter verfolgen, wollen wir uns zunächst noch ausführlicher mit den Produktionen beschäftigen.

Jede Produktion hat die Form

$$l \text{ -> } r$$

welche besagt, daß der Term auf der linken Seite durch einen solchen auf der rechten Seite ersetzt wird. Im allgemeinen Fall können sowohl auf der linken wie auf der rechten Seite Terminale und Nichtterminale auftreten, sodaß allgemein

$$l, r \in (T \cup N)^{+}$$

wobei y mindestens ein Nichtterminal enthält, welches zu ersetzen ist und die Ableitung erst dann endet, wenn x nur noch Terminale enthält.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel einer Grammatik [Ba Co 79]:

$$G_1 \quad = \quad (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

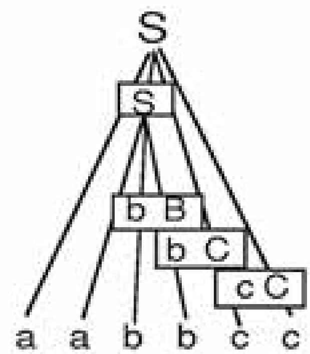
mit folgenden Produktionen:

P	=	S	->	aSBC
		S	->	a b C
		CB	->	BC
		bB	->	bb
		bC	->	bc
		cC	->	cc

Mit diesen Produktionen lassen sich z. B. folgende Ableitungen vornehmen. (Abb. 2. 3):

$\boxed{\text{S}}$	->	aSBC
aSBC	->	aabCBC
aabCBC	->	aabBCC
aabBCC	->	aabbCC
aabbCC	->	aabbcC
aabbcC	->	$\boxed{\text{aabbcc}}$

a) Produktionen



b) Syntaxbaum

Abb. 2. 3 : Ableitung eines Ausdrucks

Wie man aus den Produktionen P aber auch aus dem Syntaxbaum (Abb.2.b)) sieht, sind die Ersetzungsregeln jetzt nicht mehr so einfach wie im Beispiel der Mozart - Sonate. Speziell fällt auf, daß die zu ersetzenden Terme auf der linken Seite mehr als ein Symbol enthalten. Solche Grammatiken nennt man auch *kontextsensitiv*.

Die Frage ist, ob es auch in der Musik kontextsensitive Produktionen gibt. Die Antwort ist leicht anzugeben: natürlich, es wimmelt! Ein kleines Beispiel sei aus der 8.Prélude, op. 28 von Chopin gewählt:

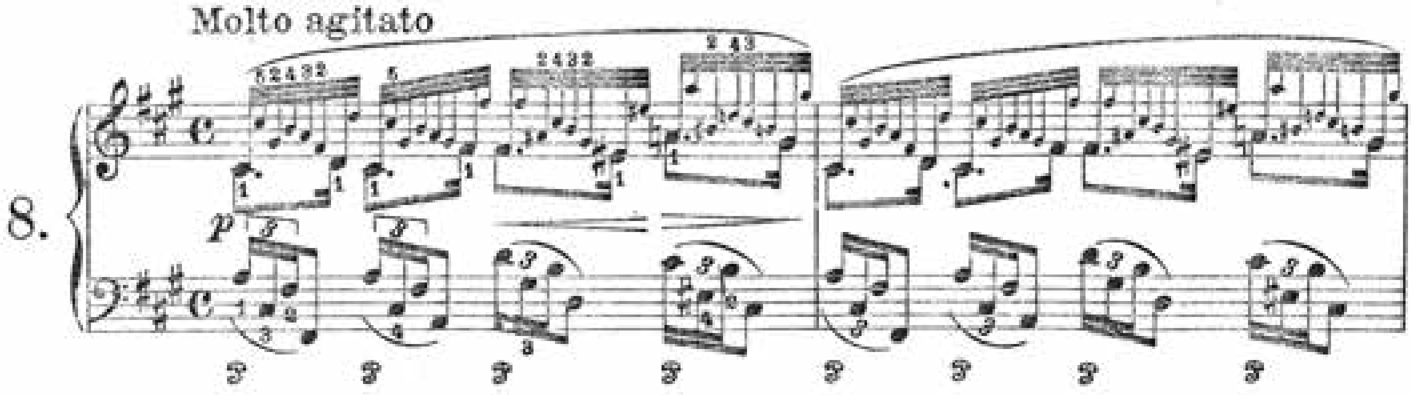


Abb. 2. 4: Anfang des 8. Préludes op. 28 von Chopin

Analysiert man den Text genauer, so kann man folgende Struktur ableiten:

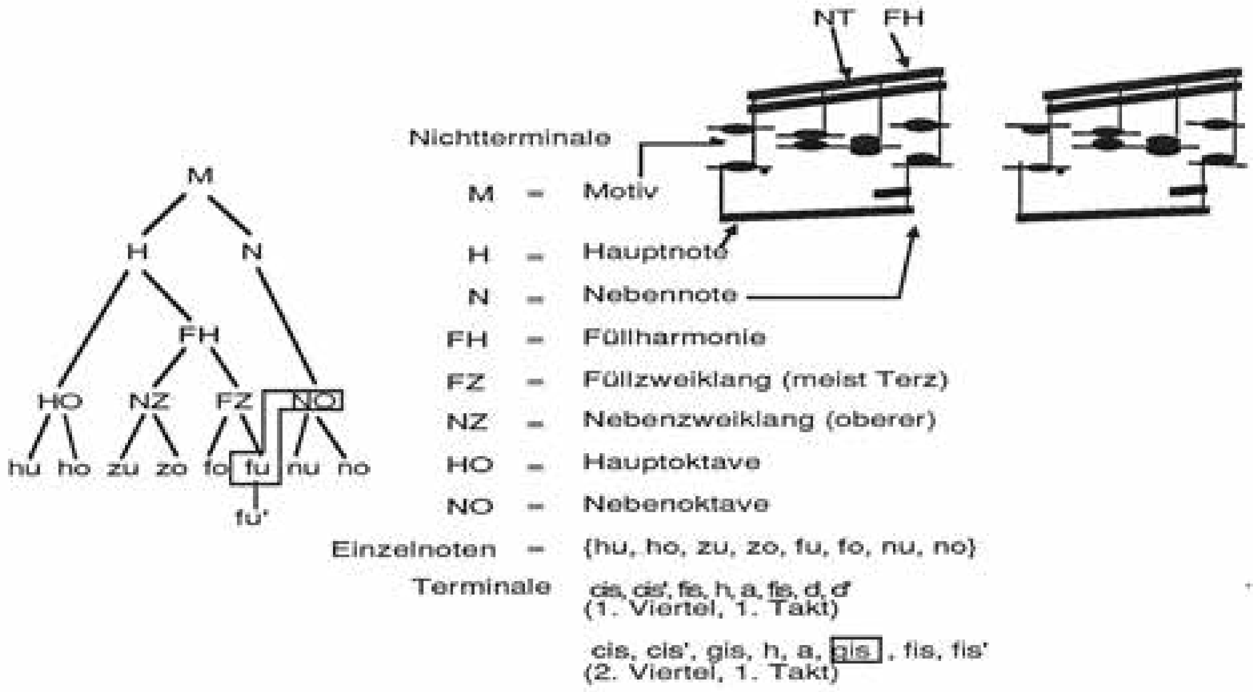


Abb. 2. 5: Kontextsensitive Ableitung des Hauptmotivs aus dem 8. Prélude op. 28 von Chopin

Die Produktionen P lauten:

1	T	->	M * = MMMM
2	M	->	H N
3	H	->	HO FH
4	FH	->	NZ FZ
5	HO	->	hu ho
6	NZ	->	zu zo
7	FZ	->	fo fu
8	NO	->	nu no
9	fu NO	->	fu' nu no — Kontextsensitive Ableitung

Die Grammatik für die einzelnen Motive lautet:

G_{P8M} = ({ M, H, N, HO, FH, NZ, FZ, NO}, { hu, ho, zu, zo, fu, fo, nu, no}, P, M)

Betrachten wir zunächst die kontextfreien Ableitungsregeln (1 - 8):

Jedes Motiv M besteht demnach aus einer Hauptnote H (als Oktave) und einer Nebennote N . Zu der Hauptoktave wird eine Füllharmonie FH in Form eines Zweiklanges (i. a. Terz) hinzugefügt. Von diesem wird der obere Nebenzweiklang NZ abgeleitet. Haupt - und Nebenoktave ebenso wie Füllzweiklang samt Nebenzweiklang werden durch die in den Produktionen 5 - 8 angegebenen Formen in Terminale ($^1/_{32}$ Noten) aufgelöst.

Die Kontextsensitivität wird durch die 9. Ableitungsregel realisiert. In diesem Fall wird eine bereits erzeugte Note fu durch eine Note fu' ersetzt und zwar abhängig von der Distanz zur Nebennote no. Ist diese Distanz kleiner als 1 Tonschritt, so wird

$$fu' := fu + \Delta$$

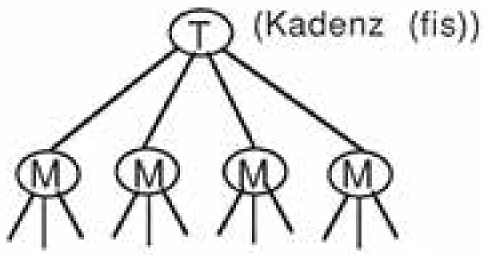
mit Δ als Korrekturglied.
Der Grund ist hauptsächlich ein technisch/manueller, um nämlich einen "glatten Anschluß" an das nächste Motiv zu erreichen und unerwünschte Repetitionen zu vermeiden.

Eine lohnende Übung für den mittlerweile an formalen Ableitungen Interesse gewinnenden Leser wäre es, möglichst sämtliche kontextsensitive Stellen an dem 8. Prélude herauszufinden und plausible Erklärungen dafür anzugeben. Er würde dabei feststellen, daß sich die zahlreichen "Ausnahmen", über die man beim Studium eines solchen Stückes (auch am Instrument zunächst) stolpert, sich als Ergebnis einer Kombination strenger Ableitungsregeln auf unterschiedlichen Stufen darstellt, wobei die Regeln auf den höheren Stufen i. a. auf einfacheren Reinformen beruhen, während in die kontextsensitiven Regeln auf unterer Stufe eine Fülle unterschiedlicher Randbedingungen eingehen, die diese damit vergleichsweise komplizierter machen.

Das ganze sieht trotzdem zunächst ungeheuer aufwendig aus: Um 8 Noten eines Motives zu erklären, werden 8 Nichtterminale, 8 Terminale und 9 Produktionsregeln eingeführt, und alles vielleicht nur, um ein einziges "aus der Reihe tanzendes" gis zu erklären. Das ist natürlich nicht der wesentliche Punkt. Wesentlich ist vielmehr, daß wir mit Hilfe der dargestellten Ableitungsregeln jetzt in der Lage sind, eine höhere Betrachtungsebene einzuziehen, auf der wir, ohne Details außer Acht zu lassen, dennoch von diesen abstrahieren können, und in unserer metasprachlichen Notation, ergänzt um die bereits ganz am Anfang eingeführten Attribute, für die ersten Takte schreiben können:

$$\mathrm{M\,(fis\ I)\ \ M\,(fis\ I^{6}_{4})\ \ M\,(fis\ IV^{6}_{4})\ \ M\,(fis V^{7})\ etc.}$$

Betrachten wir weiter die Attributfolge, so erkennen wir leicht eine Moll - Kadenz, sodaß wir weiter vereinfachen können,



indem wir die Einzelattribute (Akkorde) von M durch ein übergeordnetes Attribut (Kadenz) von T ersetzen.

Vergleichen wir diese Notation mit dem eingangs eingeführten Beispiel

(1. 3) Sextenlauf abwärts (C - Dur):
$= S_{ab}$ (C - Dur),

so sehen wir nachträglich den Bezug. Die zunächst isoliert betrachtete Sextenfolge läßt sich jetzt ohne weiteres als Metastruktur in einen syntaktischen Gesamtzusammenhang stellen.

Nachdem wir mit der musikalischen Anwendung formaler Grammatiken nicht nur ein erstes Gefühl für den Umgang gewonnen haben, sondern auch bereits spezielle Teilaspekte behandeln konnten, wollen wir das formalsprachliche Instrumentarium weiter ausbauen. Bevor wir dieses tun, soll zunächst noch eine Ordnung vorgestellt werden, die die "babylonische" Sprachvielfalt auch im formalen Bereich auf vier einfach zu unterscheidende Klassen reduziert.

2. 1. 3. 2 Chomsky - Hierarchie

Der Linguist Noam Chomsky hat in seinen bahnbrechenden Arbeiten (Chom57] u. a.) nicht nur ein einheitliches, formales, grammatikalisches Gebäude in Form der uns bereits bekannten Definition

$$G = (N, T, P, S)$$

zur Beschreibung sämtlicher Sprechvarianten mit

- ca. 4000 natürlichen Sprachen

einschließlich eines Ordungsschemas angegeben, sondern dieses Gebäude auch für zahlreiche Nutzanwendungen geöffnet. Als wichtigste dieser Nutzanweisungen seien genannt:

- Syntax - Analyse
- Transformationsgrammatiken
- Automatische Sprachanalyse

u. v. m.,

womit die theoretischen Grundlagen für Entwicklung der Programmiersprachen geschaffen wurden.

Wir wollen jedoch zunächst das Ordnungsschema, nach seinem Schöpfer "Chomsky - Hierarchie" genannt, betrachten. Chomsky hat festgestellt, daß das wesentliche, was die Vielfalt der Sprachen ausmacht, aus abstrakter Sicht nicht die unterschiedlichen Alphabete, Worte und deren Bedeutungen sind, sondern die Ableitungsregeln. Er hat dabei vier Klassen von Grammatiken unterschieden, für deren Definition folgende zusärtzliche Größen eingeführt werden sollen:

V	=	$N \cap T$	Vereinigungsmenge
$N \cap T$	=	$\{\ \}$	Vereinigungsmenge von Nichtterminalen und Terminalzeichen

Durchschnitt von Nichtterminal- und Terminalzeichen ist leere

V^* Menge aller Wörter über V, d.h. Menge beliebiger Zeichenfolgen aus V einschließlich von

$\varepsilon \in V^*$ leeres Wort
$\varnothing \quad V^*$ leere Menge

V^* Menge aller Wörter über V ohne
ε

$V^* \quad = \quad V^+ \cap \{\varepsilon\}$

Um den Unterschied nochmals zu veranschaulichen

ε ist ein leeres Wort, welches in irgendeiner Zeichenfolge enthalten sein kann, z.B. in Form eines leeren Buches.

$\varnothing$ Ist die leere Menge, die garnichts enthält, nicht einmal ein leeres Wort.

Eine formale Sprache L der Grammatik G kann dann definiert werden

$L(G) \quad T^*$

nämlich als Teilmenge der Menge aller möglichen Wörter über dem Terminalzeichenvorrat T.

Für die Definition der Produktionsregeln benötigen wir weiterhin einen Ersetzungsmechanismus, welcher Zeichenreihen auf der rechten Seite (r) überführt.

P: $l \rightarrow r$
mit $l \in V^* N V^*$
$r \in V^*$

Wie man sieht, muß also l mindestens ein Nichtterminalsymbol enthalten, sonst würde keine Ersetzung mehr möglich sein.

Nach diesem länglichen Definitionsteil können wir uns endlich die vier von Chomsky unterschiedenen Sprachtypen ansehen:

- <u>Chomsky - 0 - Grammatiken</u>

Dieses ist die mächtigste, gleichzeitig aber auch undefinierteste Klasse. Für die Produktionen gelten überhaupt keine Einschränkungen, es muß nicht einmal eine Satz - Struktur geben.
So ist es z.B. auch erlaubt, bereits erzeugte Zeichenketten einfach zu löschen

- <u>Chomsky - 1 - Grammatiken</u>

Diese Klasse läßt Produktionen der Form

$$P: \quad u A w \ \rightarrow u r w$$

mit

$$u,w \in V^*$$
$$A \in N$$
$$r \in V+$$

d.h. mit mindestens 1 Nichtterminal auf der linken Seite welche in einen Kontext eingebettet ist. Deshalb heißen diese Grammatiken auch *kontextsensitiv.*

Auch wenn der Formalismus etwas abstrakt erscheint, brauchen wir uns davon nicht verunsichern zu lassen. Die Bedeutung ist ganz einfach: Einmal erzeugte Terminale (Worte, Noten, etc.) können in Verbindung mit benachbarten Nichtterminalen, die den Kontext darstellen, nochmals ersetzt werden. Ein ausführliches Beispiel haben wir ja gerade behandelt. Weitere Beispiele für solche kontextsensitive Ableitungsregeln haben wir natürlich auch in unseren natürlichen Sprachen, um Wortwiederholungen zu vermeiden (die z. B. in vorliegendem Satz die zweimalige Verwendung des Wortes "natürlich" vermieden hätten).

<u>- Chomsky -2 - Grammatiken</u>

Diese Klasse läßt neue Produktionen der Form

$$P: \quad A \rightarrow rr$$

mit

$$A \in N$$
$$r \in V^*$$

d.h. ohne jedes Terminalzeichen auf der linken Seite zu. Diese Grammatiken heißen auch *kontextfrei.*

Wir haben diese früher nicht explizit behandelt, jedoch stillschweigend angewendet bei der Aufstellung der nicht kontext sensitiven Strukturbäume. Insoweit sind uns die Produktionsregeln ebenfalls bereits vertraut.

<u>- Chomsky - 3 - Grammatiken</u>

Diese Klasse läßt Produktionen der Form

$$A \rightarrow x\,B$$
$$A \rightarrow x$$

mit

$$x \quad \in T^*$$
$$A, B \in N$$

zu. Da die Ersetzungen immer nur rechts eines bereits erzeugten Terminals vorkommen dürfen, heißen diese Grammatiken auch *rechts - linear.* Die Bevorzugung der Richtung "rechts" rührt von unserer Schreib / Leserichtung "von links nach rechts" her und der Gewohnheit, die Richtung von Koordinatenachsen, z. B. für die fortschreitende Zeit auch nach rechts zu richten.

Als musikalisches Beispiel für eine solche rechtslineare Ableitung könnte wieder unser

Sextenlauf abwärts (C - Dur)

oder einfach eine Tonleiter

T -> a T

dienen.

Wie wie sehen, lassen sich nach Chomsky alle Sprachen unabhängig vom Vokabular, den speziellen grammatikalischen Besonderheiten und der Semantik klassifizieren hinsichtlich zweier wichtiger Eigensschafts-kategorien:

- Vorhandensein oder Nichtvorhandensein einer Satzstruktur

- Form der Ableitungsregeln / Produktionen)
  - kontextsensitiv
  - kontextfrei
  - regulär (rechts -/ linkslinear)

Dabei enthält jede Klasse jeweils alle "niederen" Klassen, wie durch Abb.2.6. angedeutet wird.

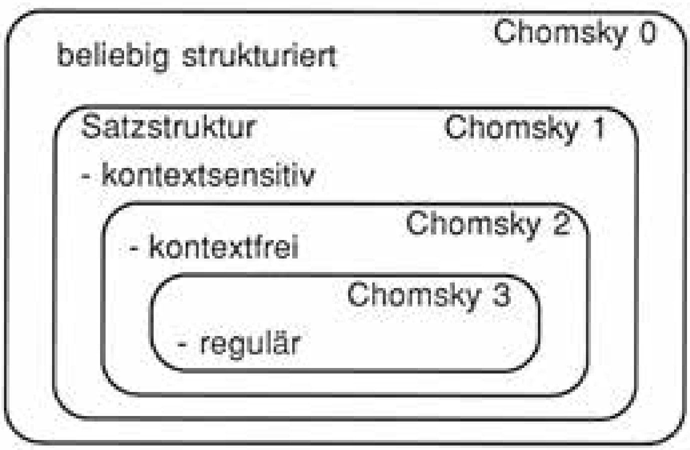


Abb. 2.6. :Veranschaulichung der Chomsky - Hierarchien

Dabei nehmen die Restriktionen für die Produktionen von außen nach innen zu, die Mächtigkeit der Sprache nimmt ab.

Wir wollen uns im folgenden und bis auf weiteres auf die Betrachtung der satzstrukturierten Sprachen beschränken, weil ihre Mächtigkeit zur Beschreibung der uns interessierenden Strukturen ausreicht. Wie wir ebenfalls bereits wissen, lassen sich die Sätze dieser Sprachen zurückführen auf eine Menge weniger oder mehr restriktiver Ableitungsregeln, oder auch Produktionen. Das Wesentliche daran ist, daß ein solches Regelwerk allgemein erlaubt, unbegrenzt viele Sätze einer Sprache zu erzeugen. Aus diesem Grund spricht man auch von *generativen* Grammatiken. Umgekehrt ist man bei Kenntnis der (endlich vielen oder wenigen) Ableitungsregeln einer Sprache in der Lage, unbegrenzt viele Sätze deren Sprache zu verstehen. Diese Vorstellung ist nun für die eigene Muttersprache vertraut. Was bedeutet dies aber für die musikalischen Sprachen?

Wir gehen bei den Werken der Großen, zumindest geht es mir selbst zunächst so, primär von der Vorstellung eines jeweils einmaligen Schöpfungsaktes aus und stellen damit die großen Werke der

• Malerei :	Mona Lisa von da Vinci
• Bildhauerei:	David von Michelangelo
• Musik:	9. Sinfonie von Beethoven

quasi in eine Reihe.

Wie aber, wenn Beethoven die Neunte nicht unter großen Mühen und genialer Inspiration komponiert hätte, sondern sie, sicher unter ebenso großen Mühen, auf "beethovenisch" mit der ihm eigenen Grammatik "gesprochen" hätte? Was wäre, wenn wir die musikalischen Sprachen nicht nur verstünden, sondern versuchten, auch sprechen zu lernen, könnten wir dann eine 49. Fuge des wohltemperierten Klaviers, oder weitere Chopin Etuden produzieren? Sicher nicht! Dies soll auch nicht beabsichtigt sein, wenn wir versuchen, die musikalischen Sprachen zu ergründen. Vielmehr wollen wir zunächst aus reiner Neugier versuchen, die Meister und ihre Werke noch besser zu verstehen, *indem wir ihre Sprache analysieren.*

Nachdem wir uns solchermaßen gegen unliebsame Verdächtigungen verwahrt haben, können wir zu den generativen Grammatiken zurückkehren. Allgemein besteht das Regelsystem einer generativen Grammatik aus drei Komponenten (s. o. und [Chom71]), der

- phonologischen
- syntaktischen
- semantischen

Die phonologische (oder auch "alphalogische") Komponente einer Grammatik bestimmt die lautliche Struktur eines Satzes, wie er von den syntaktischen Regeln erzeugt wurde.
" Die syntaktische Komponente spezifiziert eine infinite Menge von abstrakten formalen Objekten, von denen jedes alle Informationen enthält, die für eine einzelne Interpretation eines bestimmten Satzes notwendig ist. Folglich muß die syntaktische Komponente einer Grammatik für jeden Satz eine Ableitungsstruktur, auch *Tiefenstruktur* genannt, spezifizieren, die seine semantische Interpretation determiniert, und eine *Oberflächenstruktur*, die seine phonetische (Terminale in einem bestimmten Alphabet) Interpretation bestimmt. Erstere wird durch die semantische Komponente interpretiert, letztere durch die phonologische Komponente" [Chom71].

Die Oberflächen- und Tiefenstruktur lassen sich sehr anschaulich anhand des Syntaxbaumes veranschaulichen, wie es für das einleitende Beispiel (s. Abb. 2.1) die folgende Abb. 2.7 zeigt.

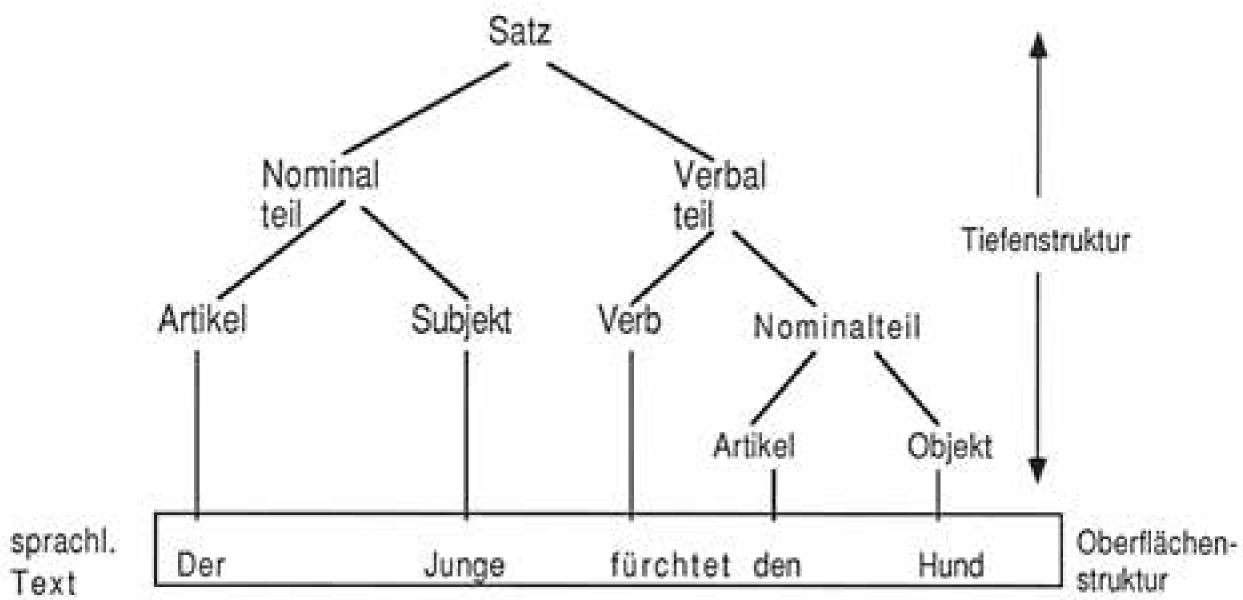
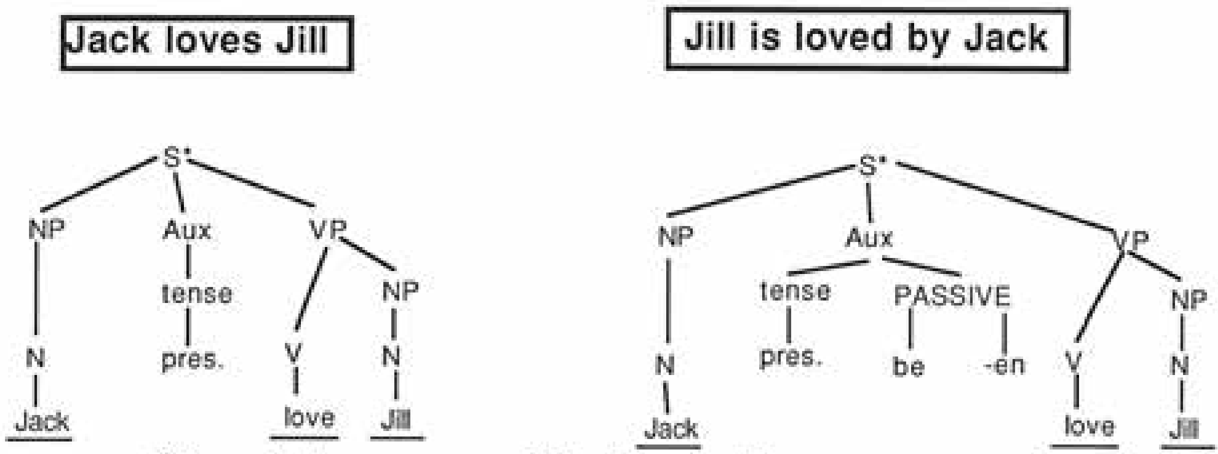


Abb. 2.7 : Oberflächen - und Tiefenstruktur eines Satzes [Chom 75]

Eine interessante Frage ist nun, ob Oberflächen- und Tiefenstruktur eineindeutig einander zugeordnet sind, oder anders ausgedrückt, ob ein bestimmter Satz (bei gegebenem Vokabular)eindeutig eine bestimmte Bedeutung besitzt, und eine bestimmte Bedeutung eindeutig durch einen bestimmten Satz (bei gegebenem Vokabular) und keinen anderen ausgedrückt wird. Sehen wir einmal von der Mehrdeutigkeit von Begriffen sowie dem Vorhandensein synonymer Begriffe ab, so ist die Frage trotzdem mit "nein" zu beantworten: Chomsky hat Tranformationsregeln angegeben, die es gestatten, die Oberflächenstruktur eines Satzes in eine andere zu überführen, ohne daß sich hierdurch die Bedeutung (Tiefenstruktur) ändert. Eine solche Tranformationsregel ist die Aktiv-/ Passivtransfornation, wie sie die folgende Abb. 2.8 veranschaulicht.

Aktivform

Passivform



*S = Satz;
N = Hauptwort;
V = Verbum;
tense = Zeit;
pres. = Präsens

NP = Nominalphrase;
VP = Verbalphrase;
Aux = Hilfszeitwort;

Abb. 2. 8 : Beispiel für eine grammatische Transformation [Bern75]

Leonard Bernstein geht in [Bern75] ausführlich auf die musikalische Anwendung der Chomsky'schen Transformationsgrammatiken ein und führt viele anschauliche Beispiele an. Sämtliche dieser Betrachtungen zielen jedoch primär auf die Semantik einer musikalischen Aussage, während wir uns zunächst noch sehr viel ausführlicher mit der syntaktischen Komponente beschäftigen wollen.

2.1.4 Syntax

2.1.4.1 Syntaktische Ableitungen

Unter Syntax wollen wir die Gesamtheit der Regeln verstehen, mit Hilfe derer Sätze einer Sprache gebildet werden können. Wir wissen bereits, daß sich diese formal als eine Menge von Produktionen einer Grammatik angeben lassen:

$$P: l \to r \qquad\qquad l \in V^* N V^*,\ r \in V^*$$

Um die Darstellungsmöglichkeiten und Eigenschaften syntaktischer Konstrukte besser verstehen zu können, werden wir uns diese an Beispielen klarmachen, auf welche wir im folgenden immer wieder zurückkommen. Damit die Beispiele nicht zu kompliziert, nicht zu einfach, leicht hinzuschreiben, leicht nachzuvollziehen und hinreichend allgemeingültig sind, wählen wir diesmal ein Beispiel aus der Mathematik. Wir wollen eine Sprache betrachten, mit deren Hilfe wir einfache arithmetische Ausdrücke mit

- Variable	:	a
- Operatoren	:	+, *
- Klammern	:	( )

bilden können. Eine mögliche Grammatik, die dieses leistet, ist die folgende [Ba Co ...]:

$$G_0 = (\{ E,T,F\}, \{ +,*,(,),a\},P,E)$$

mit P:

1. E -> E +T	Bedeutung der Nichtterminale
2. E-> T	
3. T -> T * F	E= Ausdruck ("expression")
4. T-> F	T = Term ("term")
5. F -> (E)	F = Faktor ("factor")
6. F -> a	

Wie wir sofort sehen, falls wir uns erinnern, handelt es sich hierbei um eine kontext- freie Grammatik, (da auf der linken Seite des Ableitungspfeils -> kein Terminal auftritt), also nicht zu schwer (kontextsensitiv) und nicht zu leicht (regulär) wie versprochen. Mit Hilfe dieser Grammatik können wir leicht eine Fülle ganz unterschiedlicher Sätze dieser Sprache erzeugen und uns fast spielerisch klar machen, warum wir den Begriff *generative* Grammatik eingeführt haben:

a + a + a +
a * a * a *
a * a + a
(a + a) * a
((a) + a)
a + (a * a)
a + (a)

Wir können leicht zu jeder dieser produzierten Zeichenreihen einen Syntaxbaum konstruieren, z. B. für den zuletzt aufgeführten:

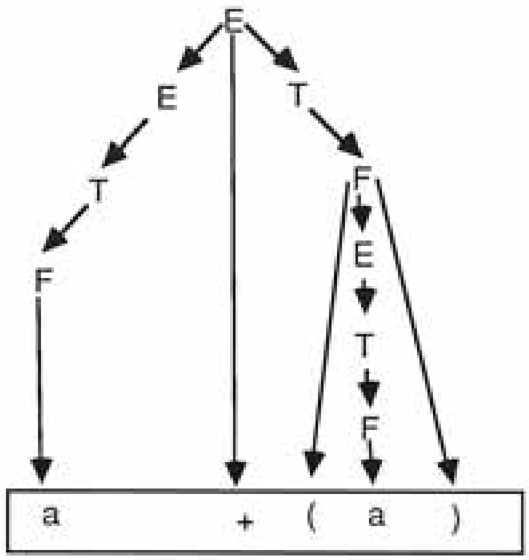


Abb. 2 .9 : Syntaxbaum zum Ausdruck a + (a)

Wir können mit diesen Regeln in zweierlei Weise umgehen:

a) Wir können damit Ausdrücke der angegebenen Form ableiten

b) Wir können zu einem gegebenen Ausdruck einen Syntaxbaum konstruieren (Abb. 2.9)

Wir können das auch mit verteilten Rollen spielen, indem eine Person (A) Ableitungen produziert und die andere Person (B) einen zugehörigen Syntaxbaum aufzustellen versucht.

An dieser Stelle sei ein kleiner Abstecher für unseren musikalischen Brückenschlag angebracht: Person A könnte der Komponist, Person B der Hörer sein (Ende des Abstechers).

Wenn man eine Weile mit diesen Ableitungsregeln spielt, wird man folgendes folgendes feststellen: Im allgemeinen sind bei jedem Ableitungsschritt z.B.

P.1	E	-> E+T	P.3	T	-> T*F
P.2	E	-> T	P.4	T	-> F

zwei Entscheidungen zu treffen:

1. Welches Nichtterminal man in P. 1 ersetzt (E oder T),

2. Welche Ableitungsregel man für die Ersetzung anwendet (P.1 oder P. 2 für E, P. 3 oder P. 4 für T).

Je nachdem, welche Entscheidungen wir bei der Ableitung treffen, erhalten wir ganz unterschiedliche Ausdrücke. Bei der kontextfreien Grammatik ist es dabei glücklicherweise noch gleichgültig, welches Nichtterminal wir zur Ersetzung auswählen, wir erhalten immer den gleichen Terminalausdruck, sofern wir die gleichen Produktionsregeln verwenden und wir uns nicht immer tiefer im Labyrinth der Ableitungsregeln verirren und nie zum Ausgang (Terminalausdruck) gelangen. Noch weit schwieriger ist der umgekehrte Weg, nämlich ausgehend vom Terminalausdruck den Eingang des Labyrinths (= Syntaxbaum) zu finden. Hier lauern Sackgassen und Zyklen, in denen man ebenfalls scheitern kann, zudem gibt es i. a. unterschiedliche Wege, sodaß die Lösung gar nicht eindeutig ist. Abb. 2.10 zeigt ein Beispiel für unterschiedliche Syntaxbäume desselben Ausdrucks; wobei wir uns allerdings eine spezielle Grammatik ausdenken mußten.

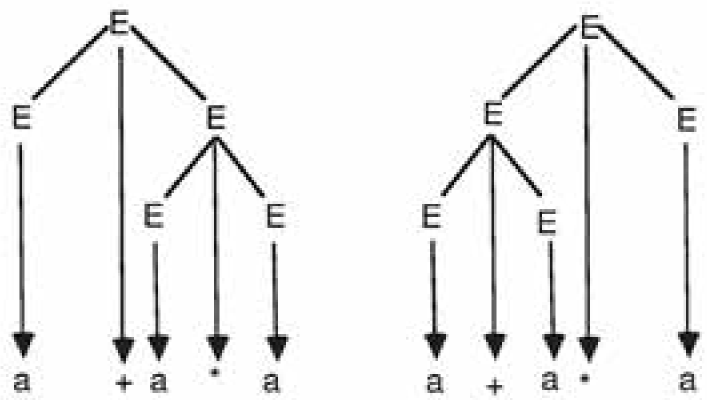


Abb. 2.10: Unterschiedliche Syntaxbäume für a + a * a mit Ableitungsregeln

E -> E + E
E -> E * E
E -> a

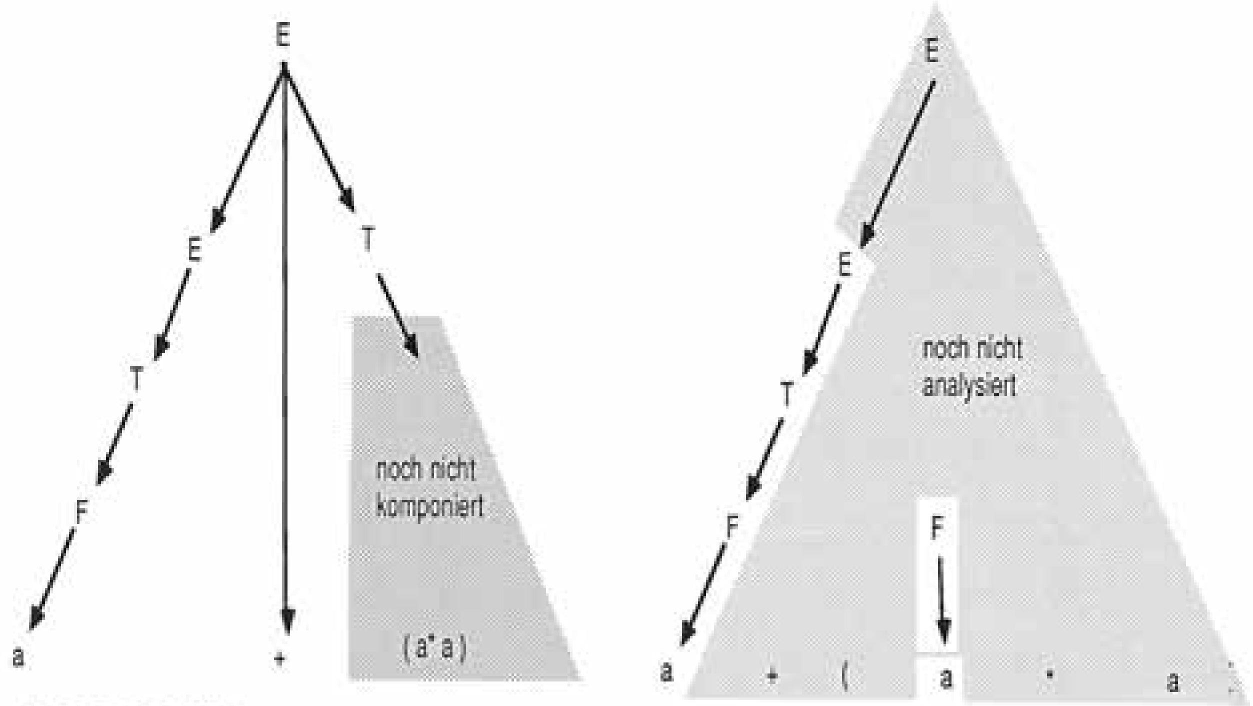
Auch wenn dieser Fall unterschiedlicher korrekter Syntaxbäume nicht bei jeder Grammatik auftreten kann, ist doch zumindest bereits Vorsicht angesagt hinsichtlich der Eindeutigkeit von Syntaxanalysen.

Der andere Fall, daß man bei der Konstruktion des Syntaxbaumes in Sackgassen oder Zyklen gerät, ist jedoch sehr viel häufiger und ein grundsätzliches Problem. Hierzu wollen wir nochmals zu unserem Spiel mit den Personen A ("Komponist") und B ("Hörer") zurückkehren.

Betrachten wir nocheinmal den Ableitungsvorgang: Der "Komponist" beginnt mit dem Startsymbol E und wählt bestimmte Produktionen aus. Er beginnt damit an der Spitze des Syntaxbaumes und konstruiert die Ableitungsstruktur von oben nach unten, bis er den Terminalausdruck gebildet hat. Wegen der Ableitungsrichtung heißt dieses Prinzip auch

TOP DOWN - Verfahren.

Abb. 2.11a) zeigt den "Komponisten" z. B. mitten in der Arbeit, d. h. genau zu dem Zeitpunkt, wo er dabei ist, den Term T auszuarbeiten.



a)TOP DOWN b) BOTTOM UP

Abb. 2.11: TOP DOWN und BOTTOM UP - Konstruktion eines Syntaxbaumes.

Der "Hörer" wiederum hat die Aufgabe, den Syntaxbaum von unten nach oben zu konstruieren, weswegen wir auch vom

BOTTOM UP - Verfahren

sprechen. Abb. 2. 11b) zeigt den "Hörer" mitten in der Analyse, d. h. ganz genau zu dem Zeitpunkt, wo er das letzte "a" innerhalb der Ableitungsfolge

a + (a ...

"gehört" hat.

Es war schon zweimal von Sackgassen und Zyklen bei der BOTTOM UP - Analyse die Rede und wir haben noch immer kein Beispiel behandelt. Dieses können wir jetzt leicht nachholen. Wenn wir unseren "Hörer" den Ausdruck a + (a * a) weiterhören lassen und er aus guter Erfahrung sich der ersten Ableitung a <- F <- T <- E erinnert und diese anwendet, (s.Abb2.12.a))

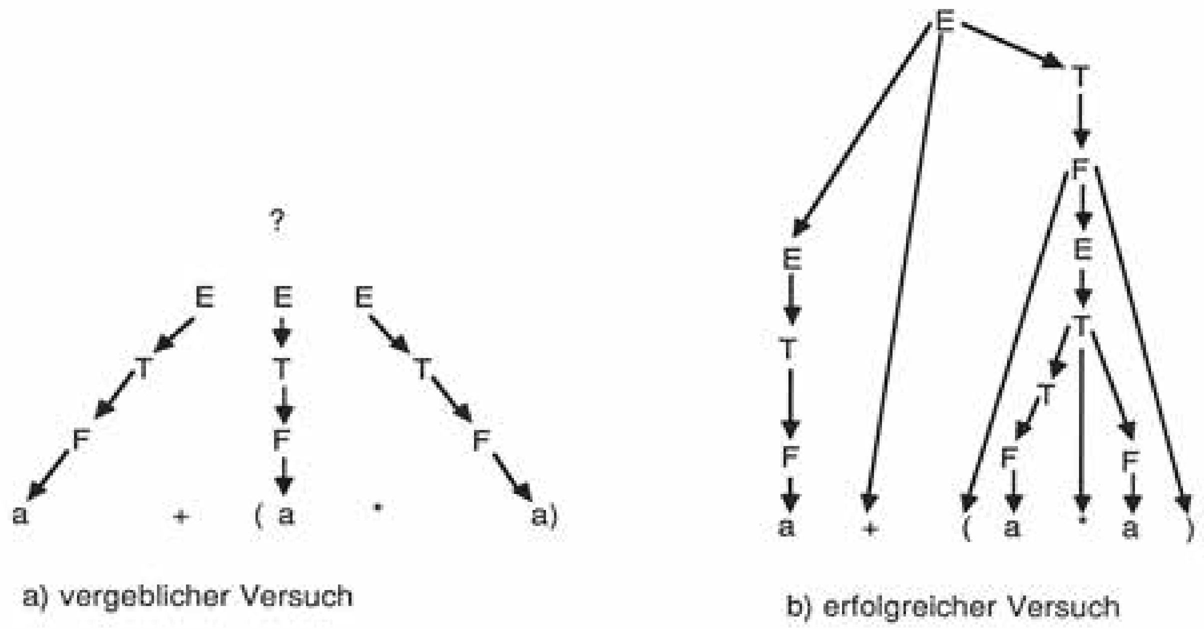


Abb. 2.12: Vergebliche / erfolgreiche Ableitung für a + (a * a)

so ist er bereits in die Sackgasse gelaufen. Er muß wieder zurück, d.h. seine letzte ungültige Ableitung vergessen, weiterhören, erneut Ableitungen bilden, etc. bis er schließlich das Startsymbol quasi als "Schlußstein" einsetzen kann und fertig ist.

"Heureka!"

Wegen dieser grundsätzlichen Unsicherheit beim nachträglichen Ableiten des Syntaxbaumes, gleichgültig, ob BOTTOM UP oder TOP DOWN, werden diese Verfahren auch indeterministisch genannt im Gegensatz zu deterministischen Verfahren bei eindeutigen Ersetzungsregeln.

Hoffentlich ist jetzt kein lesender "Hörer" durch den Begriff "Indeterministisch", der einen ungewissen Ausgang des Hörerlebnisses androht, verunsichert oder verschreckt. Glücklicherweise gibt es Mechanismen, um eine indeterministische Ableitung in eine deterministische zu transformieren, und der Mensch verfügt von Natur aus über die dazu erforderlichen Voraussetzungen. Wir wollen dies im Abschnitt 2.2 Syntaxanalyse noch genauer behandeln, jedoch sei jetzt bereits soviel gesagt:

Viele musikalische Übergänge, die wir einerseits als bekannt, andererseits als überraschend empfinden, beruhen auf solchen indeterministischen Ersetzungsregeln.

Ein Term, bereits eingeführt und dem Hörer vermeintlich vollständig bekannt, muß mit einem Mal in veränderten Kontext umgedeutet werden und führt zu einer ganz neuen Wendung. Wir werden später versuchen, hierfür Beispiele zu finden.

2. 1. 4. 2 Syntaxgraphen

Bisher hatten wir die Syntax in Form der Produktionen, d.h. der Menge der zulässigen Ableitungsregeln seiner Sprache definiert. Diese Darstellung ist korrekt, beliebig erweiterbar und eignet sich in leicht veränderter Form hervorragend für eine maschinelle Verarbeitung, z. B. zur Definition einer Programmiersprache. Für den menschlichen Betrachter, der nur eine begrenzte Menge von Formeln verträgt, ist eine anschauliche Darstellungsform in Gestalt sog. Syntaxgraphen oder Syntaxdiagramme entwickelt worden.

Ein Graph besteht aus Knoten und Kanten.

$$\text{Graph} = (K_n, K_a)$$

Ein Syntaxgraph ist ein spezieller, gerichteter Graph mit zwei ausgezeichneten Knoten, dem Start - und dem Zielknoten, bei welchem die Knoten Terminale oder Nichtterminale enthalten und die Kanten die Ableitungsrichtung angeben. Man kann ganz einfach zulässige Ableitungen dadurch erzeugen, indem man den Syntaxgraphen vom Startknoten bis zum Zielknoten durchläuft, wobei jeder in Pfeilrichtung begehbare Weg gangbar ist,auch wiederholte Male.

Versuchen wir einmal, einen Syntaxgraphen für unsere gegebene Grammatik G_0 zu entwerfen:

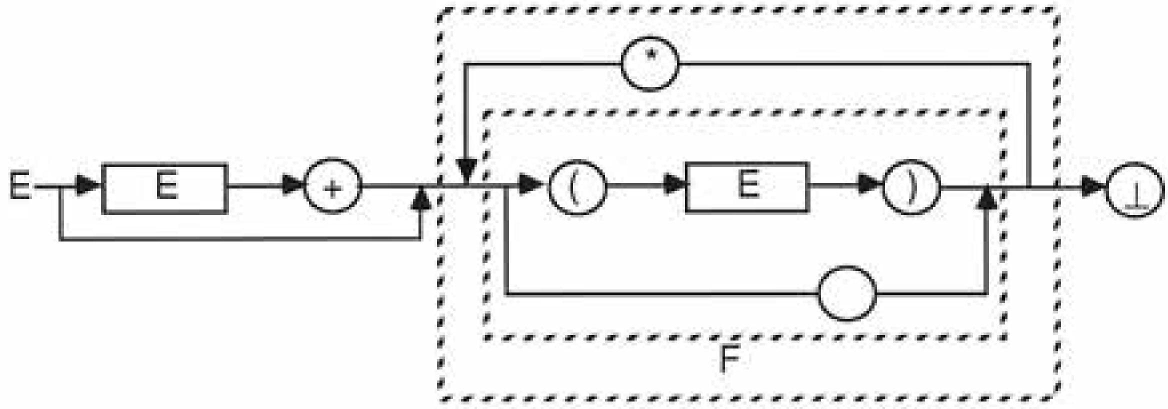


Abb. 2. 13: Syntaxgraph für Grammatik G_0

Wir sehen sehr leicht die Regeln

E -> E + T
E -> T

zusammengefaßt im Hauptzweig, sowie die innerste Ableitungsregel

F -> (E)
F -> a.

Bei den Regeln

T -> T * F

T -> F

haben wir einen kleinen Trick angewendet, indem wir ein wenig umgeformt haben,

T' -> F * T'
T' -> F

was die Ableitung der gleichen Terminalausdrücke zuläßt.

Betrachtet man den entworfenen Syntaxgraphen insgesamt, so fallen zwei Eigenschaften auf:

1. Die Nichtterminale F und T, bzw. T' treten gar nicht mehr explizit auf, weil sie im Ableitungsprozeß ersetzt wurden

2. Das Nichtterminal E tritt zweimal "in sich selber" auf.

Punkt 1 ist eine Folge unserer Bemühungen, möglichst einen zusammenhängenden, übersichtlichen Syntaxgraphen zu erhalten, und dieser sind F und T zum Opfer gefallen, was vielleicht bedauerlich, aber nicht wesentlich ist.

Punkt 2 ist hingegen fundamental! Er zeigt das Prinzip der Schachtelung, auch *Rekursion* genannt, zum ersten Mal in unseren Betrachtungen in aller Deutlichkeit, auch wenn es natürlich bereits sichtbar, aber nicht so deutlich in den Ableitungsregeln enthalten war. Speziell wegen ihrer Eigenschaft, rekursive syntaktische Strukturen anschaulich darzustellen, werden solche Syntaxgraphen auch rekursive Transitionsnetzwerke (RTN) [Win82] genannt.

Das Prinzip der Rekursion ist ein in allen Bereichen der Natur - und Geisteswissenschaften ein so wichtiges, daß wir es nicht jetzt einfach unter der Überschrift "Syntaxgraphen", wo wir es entdeckt haben, abhandeln, sondern uns weiter unten sehr viel nachdrücklicher damit beschäftigen wollen. Natürlich steht jetzt die unausgresprochene Frage im Raum, ob es in der Musik denn auch Rekursionen gibt und wie diese denn aussehen könnten, oder ob wir mit unsren theoretischen Ableitungsregeln nicht nur künstlich welche erzeugt haben, nach denen wir hinterher vergeblich suchen. Keine Angst! Wir werden sehen, daß es wunderschöne Rekursionen in der Musik gibt, die zu entdecken und analysieren besonders spannend sein wird. Bevor wir uns aber damit beschäftigen dürfen, müssen wir unser Grundlagenkapital um einen noch fehlenden, ganz wichtigen Abschnitt ergänzen.

2. 2. Syntaxanalyse

2. 2. 1 Endliche Automaten

Schon früh haben die mathematischen Linguisten festgestellt, daß die formalen Sprachen, so wie wir sie definiert haben, so strengen Gesetzen gehorchen, daß Sätze dieser Sprachen nicht nur mechanisch generiert werden können sondern die so generierten Sätze auch wieder mechanisch analysiert und sogar semantisch richtig interpretiert, um nicht zu sagen "verstanden" werden können. Wir haben uns vorhin selbst bei den Ableitungssätzen (s. Abschnitt 2. 1. 4. 1) an die Konstruktion von Syntaxbäumen gewagt und festgestellt, daß wir mit List und Tücke ganz schön weit kamen und sogar für den Ausdruck a + (a * a) den zugehörigen Baum gefunden haben.

Die Mathematiker geben sich natürlich nicht mit Probieren zufrieden (bzw. formalisieren auch das Probieren, wenn sie nicht drumherum kommen), und haben herausgefunden, daß es in der Tat abstrakte Maschinen, sog. *endliche Automaten* ("finite state automaton", kurz FSA) gibt, die so definiert werden können, daß sie bestimmte Sprachen akzeptieren.

Es ist nicht wichtig, tiefer in die Automatentheorie einzusteigen, um das Wesentliche zu verstehen: Wesentlich ist, daß ein solcher, endlicher Automat in der Lage ist, Sätze formaler Sprachen wortweise anzusehen und und speziell für die Sätze "seiner" Sprache eine Zustandsfolge so zu durchlaufen, daß er mit dem Satzende einen besonderen Endzustand erreicht, dem die Bedeutung "akzeptiert" zugeordnet ist. Erreicht er für einen gegebenen Satz den Endzustand nicht, so blockiert er und zeigt damit an, daß dieser Satz nicht seinem Sprachschatz angehört. Endlich heißt der Automat, weil er dabei endlich viele interne Zustände einnehmen kann. Abb. 2.14 zeigt einen indeterministischen endlichen Automaten zur Akzeptanz eines C - Dur - Dreiklanges mit den Einzeltönen {c, e, g} in beliebiger Auswahl und Reihenfolge.

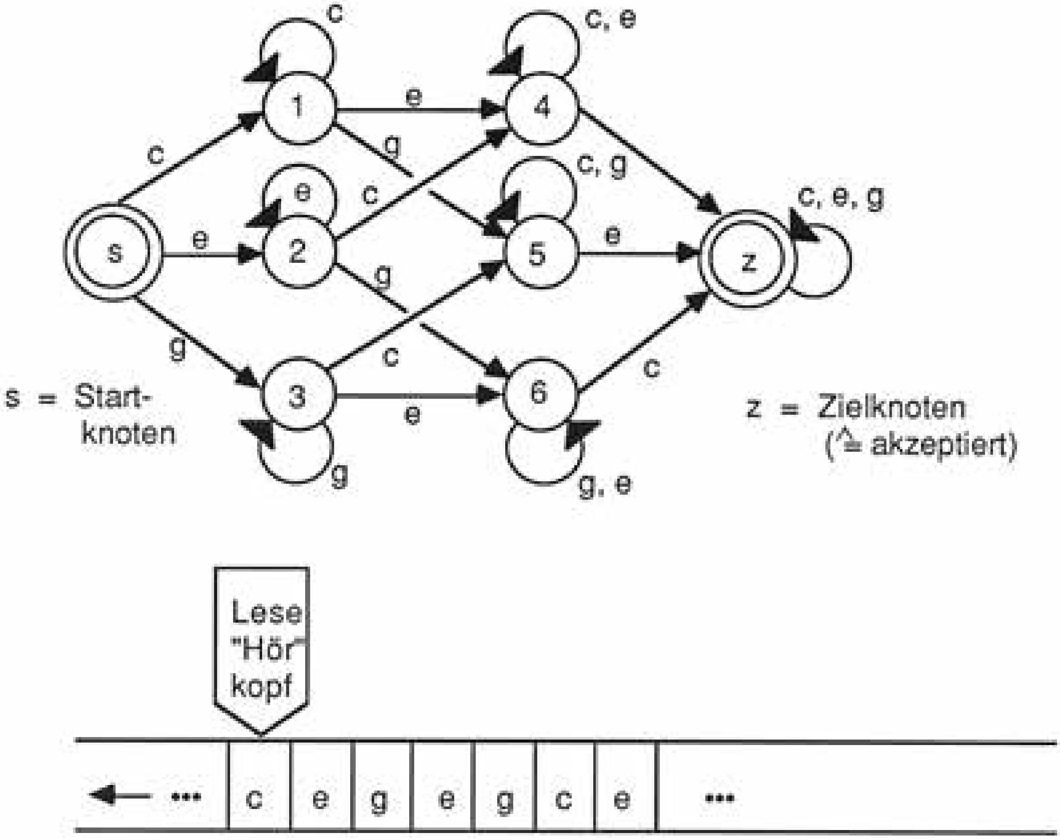


Abb. 2. 14: Deterministischer Automat zur Analyse eines C - Dur - Dreiklanges

Die zugehörige Grammatik lautet:

D -> c F | e F | g F | = alternative Produktionen

F -> c F | e F | g F

welche sich bei näherem Hinsehen als rechtslineare oder auch allgemein reguläre Grammatik erweist. Der Automat verfügt über 6 Zustände zuzgl. Start - und Zielzustände, die sich leicht aus der regulären Grammatik konstruieren lassen.

Beim Durchlaufen der Zustandsfolgen werden akzeptiert:

s, 1, 4, z	:	CI	Grundform
s, 2, 6, z	:	CI^{6}_{3}	1. Umkehrung
s, 3, 5, z	:	CI^{6}_{4}	2. Umkehrung

sowie alle möglichen Permutationen der Reihenfolgen. An dieser Stelle mag man sich fragen, was endliche Automaten mit der musikalischen Realität zu tun haben. Sollen Komponist, Musiker und Hörer mit leblosen Automaten verglichen werden? Sind wie wieder bei unserem Schnelldruckerbeispiel vom Anfang?

Ja und Nein. Natürlich sind Künstler ebensowenig wie die kunstbegeisterten Zuhörer Automaten. Trotzdem kann die Nachbildung realer Vorgänge durch ein abstraktes Modell hilfreich sein, um ein Verständnis von den möglichen realen Abfolgen zu gewinnen, zu verbessern, zu erweitern und natürlich auch zu verwerfen. Die bisherige Betrachtung von endlichen deterministischen Automaten hat uns immerhin die Erkenntnis vermittelt, daß es abstrakte Maschinen gibt (die man übrigens auch leicht bauen kann), welche in der Lage sind, Sätze einer formalen Sprache als korrekt oder nicht korrekt im Sinne der ihnen eigenen Sprache zuerkennen. Wir haben ferner gelernt, wie eine solche Maschine konkret aussehen könnte, welche, z.B. regulären Ausdrücke für allgemeine C - Dur - Dreiklänge sie versteht. Kein Wort ist bisher darüber gesagt worden, daß der Mensch es genauso tut. Diese Zurückhaltung soll im Folgenden aufgegeben werden!

Sehen wir uns nocheinmal den Automaten in Abb. 2. 14 an, so müssen wir wieder einmal kritisch feststellen, daß wir mit diesem Ansatz sehr schnell zu komplizierten Strukturen gelangen: 8 Zustände, und 19 Übergänge, um einen einfachen Dreiklang zu erkennen! Wie groß muß ein solcher Automat denn werden, um eine Sonate, oder am Ende gar eine Sinfonie zu verstehen? 10 000, 100 000 Zustände oder mehr? Und was soll denn das Ganze? Leistet ein solches Modell denn noch einen Beitrag zum besseren Verständnis der Musik?

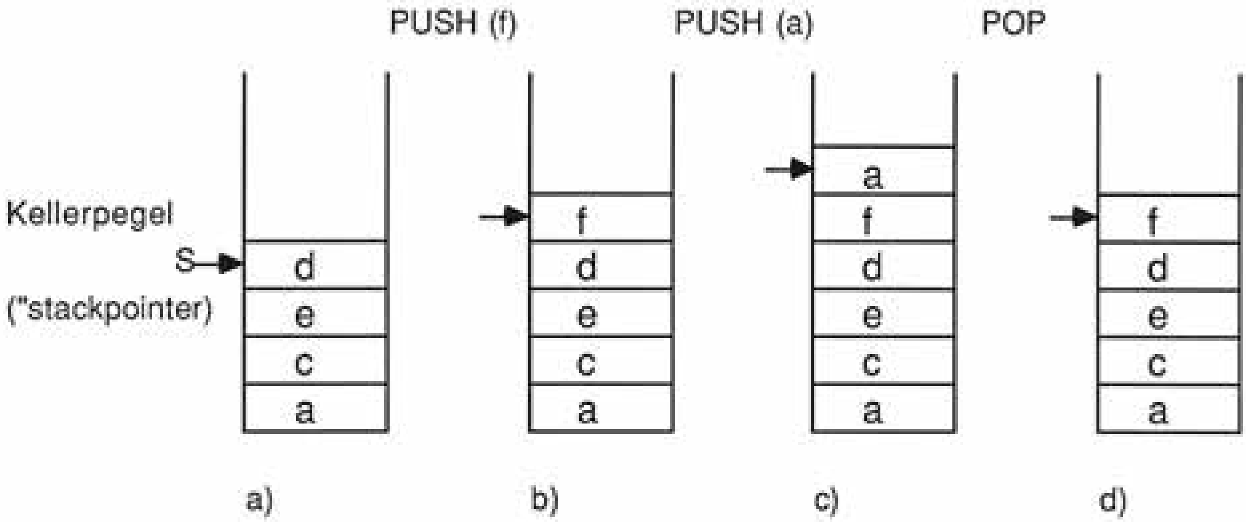
Sicher nicht! Vielmehr ist es so, daß wir wieder zunächst die Mechanismen aus den unteren Analysestufen betrachtet haben, die erforderlich sind, um die einfachen syntaktischen Elemente z.B. in Form regulärer Ausdrücke zu ermitteln. Sobald wir kontextfreie und kontextsensitive Grammatiken vorliegen haben, und dazu mit indeterministischen Ableitungen, sind endliche Automaten überfordert. Hier müssen wir zu einer mächtigeren Klasse von Automaten übergehen, die eine Erweiterung der endlichen Automaten darstellen.

Trotz der großen Mächtigkeit ist die Arbeitsweise dieser Automaten in gewisser Weise sogar wieder einfacher zu verstehen, sodaß ein verängstigter Leser an dieser Stelle wieder Hoffnung schöpfen kann.

2. 2. 2 Kellerautomat

Der aufmerksame Leser wird sich bei den Automaten vielleicht gefragt haben, wo denn der bei der Syntaxanalyse zu ermittelnde Strukturbaum eigentlich entstanden ist: Bei genauerem Hinsehen wird man sich überlegen können, daß dieser aus den irgendwo niedergeschriebenen Produktionen in Verbindung mit der Reihenfolge, in der diese Produktionen eingesetzt werden, aufschreibbar wäre. Aber so richtig zu sehen bekommt man ihn bisher noch nicht, auch nicht in Teilen. Das soll sich jetzt ändern.

Der Kellerautomat ("push down automaton" = PDA) verfügt eben zu diesem Zweck über einen Speicher, den sogenannrten Keller ("stack"), in den der Strukturbaum in den jeweils gerade analysierten Zweigen abgelegt werden kann. Unter Keller versteht man dabei (in Anlehnung an einen Kohlen - oder Kartoffelkeller) einen speziellen Speicher, in dem man Elemente jeweils obendrauf packen (Operation "push down" kurz PUSH) oder von oben herunternehmen kann (Operation "pop up" kurz POP), und zwar genau unter Einhaltung der Reihenfolge ("last in first out", kurz LIFO) (s. ABB. 2. 15)



<u>Abb. 2. 15:</u> Zur Veranschaulichung der Kellerautomaten PUSH und POP

Abb. 2. 15 a) zeigt den Keller zu einem Zeitpunkt, in dem aufgrund früherer Operationen die Elemente a, c, e und d abgelegt sind. Ein neues Element f fällt in der Analyse an und soll abgespeichert werden. Dies geschieht mittels der Operationen

PUSH (f), bzw.
PUSH (a)

für das weitere Element a. Gleichzeitig wird der Kellerpegel noch gesenkt. Will man irgendwann einmal später auf das oberste Kellerelement, auf welches jeweils der Kellerpegel zeigt, zugreifen, so liefert die Operation

POP

das Element a und bei wiederholtem Aufruf nacheinander f, d, e, c und a, bis der Keller leer ist. Die POP - Operation besitzt im Gegensatz zur PUSH - Operation keinen Operanden, weil sowieso nur das jeweils oberste Kellerelement gemeint sein kann.

Wozu die ausführliche Erklärung des Kellerprinzips?

Dies hat zwei Gründe:

1. Der Keller eignet sich, wie wir am Beispiel noch sehen werden, hervorragend als dynamischer Zwischenspeicher während der Syntaxanalyse.

2. Der Keller eignet sich, wie wir ebenfalls am Beispiel (des Selbstexperiments) noch sehen werden, weiterhin hervorragend zur Beschreibung der Vorgänge, die im menschlichen Gehirn während des Hörens ablaufen.

Beide Punkte zusammen sind so evident, daß wir bereits jetzt die Behauptung aufstellen wollen, daß bei (aufmerksamem) Hören von Musik im Bewußtsein des Hörers echte Kellerstrukturen dynamisch auf - und abgebaut werden, die diesen überhaupt erst in die Lage versetzen, die Musik richtig zu hören (siehe auch [Hof79] S. 137ff). Der musikalische Hörer hat alo nicht nur ein lineares, "flaches" Gedächtnis, in welches er das Gehörte als Erinnerung überführt, sondern quasi orthogonal dazu (mindestens) einen dynamischen Keller, welcher ihn befähigt, musikalische Strukturen zu erkennen und damit die Musik zu "verstehen". Während sich der "horizontale" Gedächtnisspeicher durch die Erinnerung füllt und durch das Vergessen wieder leert, wird der "vertikale" Kellerspeicher während des Hörens permanent und z.T. sehr kurzfristig auf - und abgebaut, wobei der Keller zu Beginn leer und i.a. auch am Ende eines Stückes wieder in diese Grenzen zurückversetzt ist.

Erstaunlicherweise hat sich die klassische Musiktheorie (meines Wissens) bisher kaum, (oder vielleicht gar nicht ?) den dynamischen Vorgängen gewidmet, die bei der Strukturanalyse mittels Kellermechanismen beim Hörer ablaufen. Viele musikalische Strukturen werden jedoch eigentlich erst richtig verständlich, wenn man diese dynamischen Mechanismen miteinbezieht. Bevor wir zu den Anwendungen unserer Grundlagen kommen, wollen wir jedoch zunächst diese Mechanismen genauer verstehen und kehren hierfür zu unseren Kellerautomaten zurück.

Auch wenn die mathematischen Linguisten wie Chomsky [Chom57] die theoretischen Grundlagen für die Sprachanalyse gelegt haben, so waren es doch eigentlich die Informatiker, speziell die Compilerbauer, die sich mit den erforderlichen Algorithmen im Detail beschäftigt haben ([BaCo79] [Wino82]). Deren Ziel war es, für eine möglichst große Klasse von formalen Sprachen in Gestalt von Programmiersprachen wie ALGOL, FORTRAN, PASCAL etc. Sprachübersetzer zu entwickeln, welche es gestatten, ein in der jeweiligen Programmiersprache geschriebenes Programm zu analysieren und in ein ausführbares Maschinenprogramm zu übersetzen. Die Syntaxanalyse mit der Erstellung des Strukturbaumes ist hierbei einer der zentralen Verarbeitungsvorgänge. Wegen der mit der Analyse notwendigerweise verbundenen Zerlegung des zu untersuchenden Satzes wird der Vorgang auch "Zerteilung" ("parsing"), die zugehörige Funktionseinheit "Zerteiler" ("parser") genannt.

Die Compilerbauer haben je nach Grammatik zahlreiche unterschiedliche Techniken zur Syntaxanalyse entwickelt, abhängig von der

- Ableitungsrichtung
    * TOP DOWN
    * BOTTOM UP

- Determiniertheit
    * deterministisch
    * indeterministisch

- Vorausschau (LOOK AHEAD)
    * keine
    * k - Elemente

Entsprechend zahlreich sind die existierenden Zerteiler - Varianten und die Entscheidung für eine spezielle oftmals schwer zu treffen. In unserem Fall des Zerteilers für den musikalischen Hörer haben wir jedoch Glück: Wir können uns aufgrund der Natur der Sache nicht nur eindeutig für einen einzigen Typ entscheiden, sondern haben dabei gleichzeitig noch die maximale Mächtigkeit. Der Typ, der hier in Frage kommt, ist ein

- indeterministischer BOTTOM UP - Zerteiler mit
  k Elementen Vorausschau,

in der Fachterminologie auch

LR (k) - PARSER

genannt [BaCo79]. Die Festlegung läßt sich leicht begründen:

- Indeterministisch: Der menschliche Hörer ist ohne weiteres in der Lage, eine fehlerhafte Ableitungsregel schnell durch eine andere zu ersetzen.

- k - Elemente Voraussehen: "Voraussehen heißt beim Hörer, daß man zunächst k weitere Elemente aufnimmt, bevor eine Entscheidung für eine bestimmte Ableitungsregel getroffen wird. Mit der durch diese verzögerte Entscheidung verfügbaren zusätzlichen Information läßt sich eine indeterministische in eine deterministische Ableitung überführen."

Auch wenn vielleicht nicht alle computertechnischen Erläuterungen gleich verstanden worden sind, kann doch folgendes mit Beruhigung zur Kenntnis genommen werden: Der menschliche Hörer ist aufgrund seines "horizontalen", akustischen Erinnerungsvermögens und seines "vertikalen", dynamischen Kellers zusammen mit seinem Gedächtnis für Ableitungsregeln von Natur aus mit den potentiell mächtigsten bekannten Werkzeugen zur Syntaxanalyse ausgestattet.

Wie das theoretisch funktioniert, wollen wir uns jetzt genauer ansehen. Hierzu müssen wir zunächst noch den Kellerautomaten definieren.

Ein Kellerautomat (s. Abb. 2.16) besteht aus einem endlichen Automaten, einem Lesekopf zum lesen der Eingabesymbole und einem Keller zum dynamischen Abspeichern von Strukturelementen.

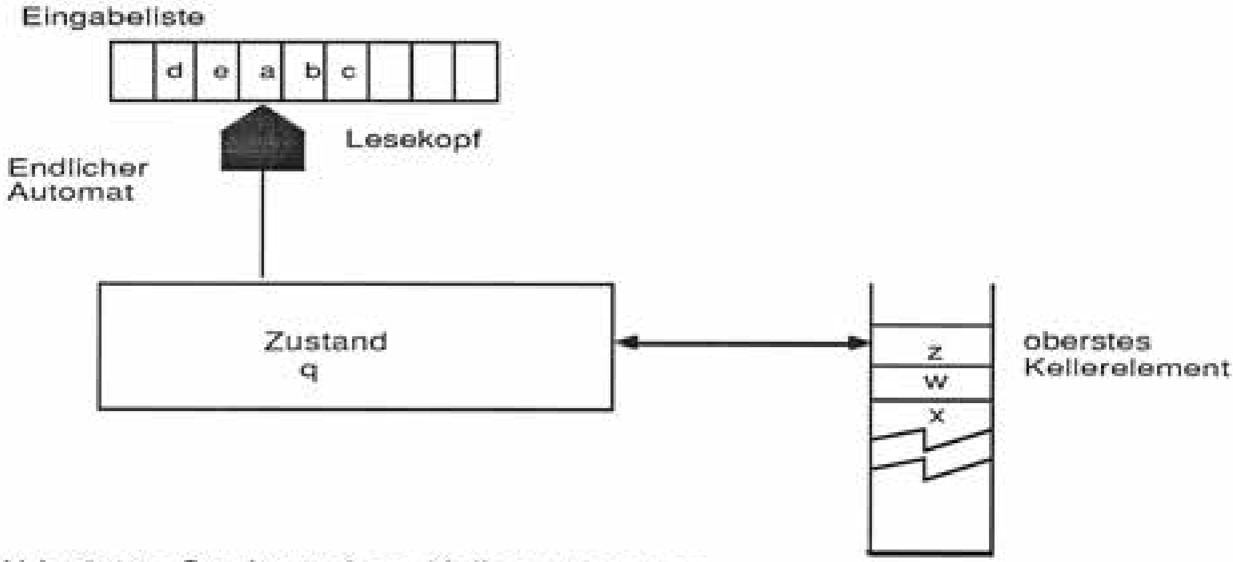


Abb. 2.16: Struktur eines Kellerautomaten

Formal ist der Kellerautomat definiert als 7 - Tupel [BaCo79]

$$PDA = (T, H, Q, \delta, q_0, \perp, F)$$

mit

1. T	=	Eingabealphabet (= Menge von Terminalen)
2. H	=	Kelleralphabet (= Vereinigungsmenge von Terminalen und Nichtterminalen)
3. Q	=	Menge innerer Zustände
4. δ	=	Abbildungsfunktion
5. q_0	=	Startzustand
6. $\perp$	=	Initialsymbol im Keller (= leer)
7. F	=	Menge von Haltezuständen

Dieser allgemeine Kellerautomat K reduziert sich für eine kontextfreie Grammatik G auf folgende Definition:

1. K hat nur zwei Zustände

   $Q = \{q, r\}$

   mit

   q = Zustand, in dem gelesen und analysiert wird
   r = Haltzustand

2. Das Eingabealphabet ist genau wie bei der Grammatik

   T = Menge von Terminalen

3. Das Kelleralphabet besteht aus der Vereinigungsmenge von Terminalen und Nichtterminalen samt Initialsymbol $\perp$.

   $H = N \text{->} T \text{->} \perp$

4. Die Übergangsfunktion

   δ

   realsiert die Abbildung

   $Q \times H^* \times (\Sigma » \{e\}) \text{-->} Q \times H^*$

   was weiter unten gleich verständlicher erläutert werden wird.

5. Es gibt einen Haltzustand $F = \{r\}$, den der Automat annimmt, wenn alle Eingabesymbole gelesen sind und der Keller wieder auf Null abgebaut ist.

Obwohl die formale Definition des Kellerautomaten zunächst ziemlich unverständlich anmutet, läßt sich die Arbeitsweise leicht verstehen. Das Prinzip ist dabei folgendes:

I. Jedes Eingabesymbol wird gelesen und zunächst einmal in dem Keller abgelegt.

II. Danach wird geprüft, ob eine Ableitungsregel existiert, derzufolge das oberste oder die obersten Kellerelemente zu einem Nichtterminal zusammengefaßt werden können. Wenn ja, wird diese Ersetzung vorgenommen, wenn nein, das nächste Elementsymbol gelesen. Bei der BOTTOM UP - Vorgehensweise werden dabei die Ableitungsregeln (wie bereits oben erwähnt) in umgekehrter Richtung angewendet.

Formuliert für unsere Syntaxanalyse würde dies lauten:

I^M Jeder Ton wird gehört und zunächst einmal im Keller an oberster Stelle gemerkt.

II^M Falls es z.B. ein Motiv gibt, welches dem obersten oder den obersten und damit zuletzt gehörten Tönen entspricht, werden der oder die Töne auf dem Keller gelöscht und durch das Motivsymbol ersetzt. Ansonsten wird der nächste Ton erwartet und entsprechend Regel I^M fortgefahren. Diese Regel II^M gilt nicht nur für Töne, sondern ebenso für Motive, die ihrerseits wieder zu Themen zusammengefaßt werden können u.s.w..

Dies geht solange, bis kein Eingabesymbol mehr vorliegt, d.h. der zu analysierende musikalische Abschnitt zu Ende ist. Nachdem das letzte Eingabesymbol gelesen ist, ist der Analysevorgang jedoch noch nicht zu Ende. Vielmehr wird versucht, die auf dem Keller befindlichen Terminal - und Nichtterminalsymbole so lange zu ersetzen, bis der Keller wieder bis auf den Boden ($\perp$) abgebaut, d.h. umgekehrt die Spitze des Syntaxbaumes schließlich erreicht ist.

Dieser zuletzt genannte Analyseschritt nach Ablauf des Hörvorgangs ist interessant und wird uns nachher nocheinmal beschäftigen.

Zunächst wollen wir das ganze noch einmal, wie versprochen, an einem Beispiel veranschaulichen. Wir verwenden dafür wieder unsere altvertraute Grammatik G_0 mit den Ableitungsregeln

P. 1. E -> E + T
P. 2. E -> T
P. 3. T -> E * F
P. 4. T -> F
P. 5. F -> (E)
P. 6. F -> a.

und wollen den Ausdruck

$$(a * (a * a))$$

analysieren.

Zunächst stellen wir einmal die Übergangsfunktion δ gemäß Regel I auf, welche lediglich zum Ziel hat, Eingabesymbole auf den Keller zu befördern (mittels PUSH (x)). Wir schreiben dies so:

I.1	δ	$(q, \in, a)$	=	$\{(q, a)\}$
I.2	δ	$(q, \in, +)$	=	$\{(q, +)\}$
I.3	δ	$(q, \in, *)$	=	$\{(q, *)\}$
I.4	δ	$(q, \in, "(")$	=	$\{(q, "(")\}$
I.5	δ	$(q, \in, ")")$	=	$\{(q, ")")\}$

Lesezustand (bleibt erhalten

Eingabe-element

neuestes oberstes Kellerelement

alle bisherigen Keller-elemente bleiben unverändert

Tab. 2.4: Übergangsfunktion (I)

Danach werden die Ableitungsregeln in umgekehrter Richtung in die Ableitungsfunktion übernommen.

I.1	δ	$(q, E + T \varepsilon)$	=	$\{(q, E)\}$	von Regel	P. 1
I.2	δ	(q, T, ε)	=	$\{(q, E)\}$		P. 2
I.3	δ	$(q, T * F, \varepsilon)$	=	$\{(q, T)\}$		P. 3
I.4	δ	(q, F, ε)	=	$\{(q, T)\}$		P. 4
I.5	δ	$(q, (E), \varepsilon)$	=	$\{(q, F)\}$		P. 5
I.6	δ	(q, a, ε)	=	$\{(q, F)\}$		P. 6
I.5	δ	$(q, \perp E, \varepsilon)$	=	$\{(q, \varepsilon)\}$	stop.	

Tab. 2.5: Übergangsfunktion (II)

Die folgende Ableitung zeigt die Folge der Zustandsübergänge in Form der Übergangsfunktion δ ausgehend von Anfangszustand (Schritt1)), leer.

Anfangszustand:

Lesezu- stand

Keller leer

Position des Lesekopfs

Eingabeelemente (noch nicht gelesen)

1) δ (q, ⊥, (a * (a * a))) |--
2) δ (q, ⊥ (, a * (a * a))) |--
3) δ (q, ⊥ (a, * (a * a))) |--
4) δ (q, ⊥ (F, * (a * a))) |--
5) δ (q, ⊥ (T, * (a * a))) |--
6) δ (q, ⊥ (T *, (a * a))) |--
7) δ (q, ⊥ (T * (, a * a))) |--
8) δ (q, ⊥ (T * (a, * a))) |--
9) δ (q, ⊥ (T * (F, * a))) |--
10) δ (q, ⊥ (T * (T, * a))) |--
11) δ (q, ⊥ (T * (T *, a))) |--
12) δ (q, ⊥ (T * (T * a,))) |--
13) δ (q, ⊥ (T * (T * F,))) |--
14) δ (q, ⊥ (T * (T,))) |--
15) δ (q, ⊥ (T * (E,))) |--
16) δ (q, ⊥ (T * (E),)) |--
17) δ (q, ⊥ (T * F,)) |--
18) δ (q, ⊥ (T,)) |--
19) δ (q, ⊥ (E,)) |--
20) δ (q, ⊥ (E), ε) |--
21) δ (q, ⊥ F,ε) |--
22) δ (q, ⊥ T, ε) |--
23) δ (q, ⊥ E, ε) |--
24) δ (q,ε, ε) stop

Tab. 2. 6: Folge von Zustandsübergängen

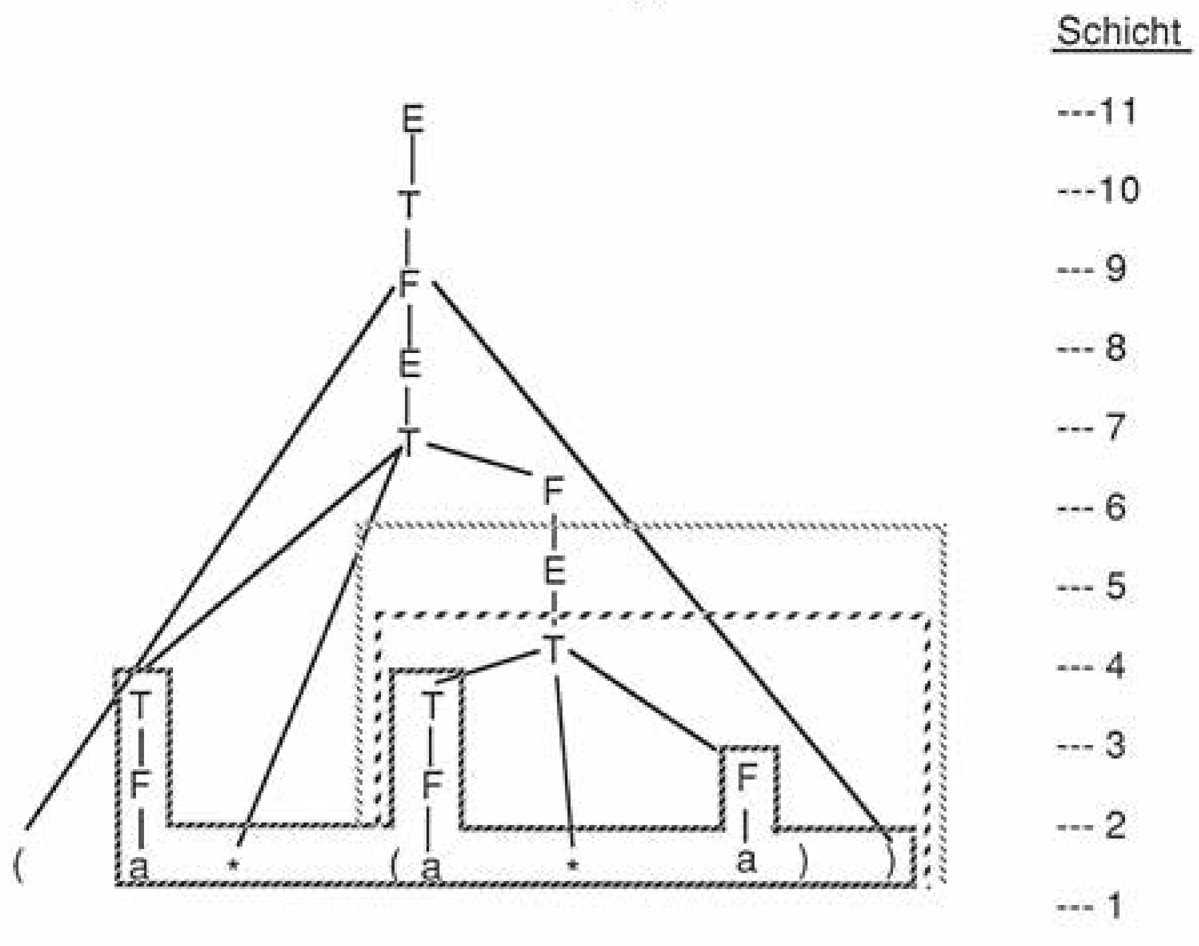


Abb.: 2.16: Ableitungsstruktur

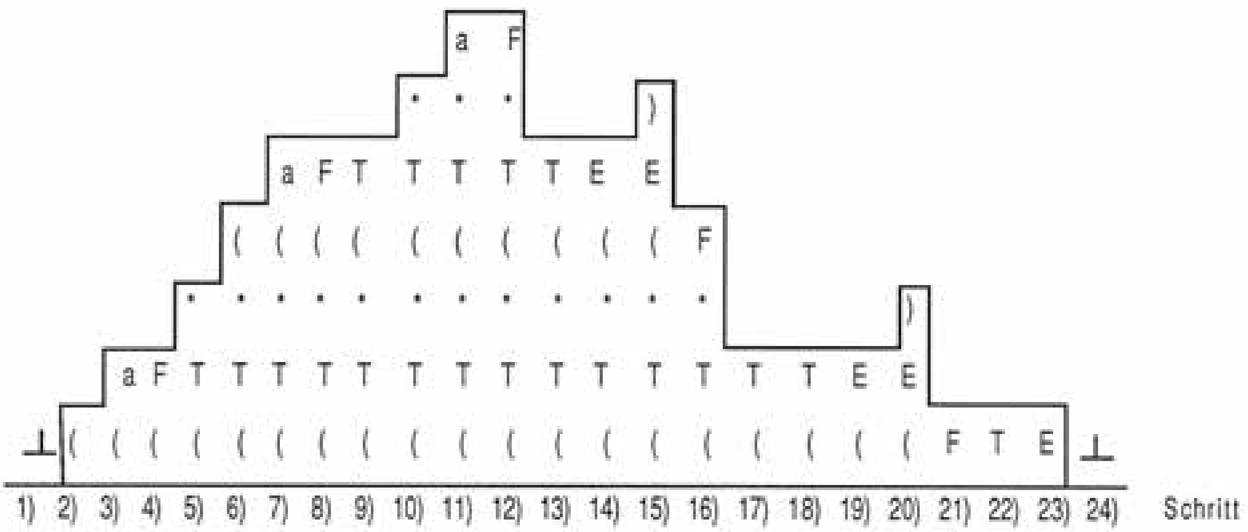


Abb.: 2.17: Kellerinhalte

Wie man in Abb. 2. 17 sieht, erreicht der Keller bei den Schritten 12) und 13) die größte Kellerausdehnung mit immerhin 7 abgespeicherten Elementen, die dann schrittweise wieder abgebaut wird, sich aber z.T. wieder erhöht (Schritte 16) und 20)). Interessant ist der Ablauf nach Schritt 20): Hier läuft der Analyseprozess ohne weiteres Einlesen weiter bis zur Spitze, in Abb. 2. 16 also von der Schicht 9 bis zur Schicht 12 hoch. Dannach ist die Eingabeliste leer, d.h. der Analyseprozess erfolgreich beendet.

Möglicherweise wird jetzt noch immer jemand fragen, wie man denn nun eigentlich den schrittweise abgeleiteten Syntaxbaum als Ganzes erhält, so, wie er in Abb. 2. 16 abgebildet ist. Nun, dies läßt sich leicht dadurch bewerkstelligen, daß man jede Veränderung auf dem Keller in eine Konstruktionsanweisung umsetzt. Vielleicht versucht ein engagierter Leser einmal, diese Regeln aufzustellen.

3. Elementare Anwendungen

3. 1 Sprachliches Schichtenmodell

In Kapitel 2 war behauptet worden:

"Musik ist eine Sprache"

und anschließend wurden entsprechend der Chomsky - Hierarchie

- kontextsensitive
- kontextfreie und
- reguläre

Sprachen definiert und an musikalischen Beispielen erläutert. Nicht nur die Definitionen, sondern auch die Techniken der Syntaxanalyse sind sehr unterschiedlich, wie ebenfalls demonstriert wurde. Damit nicht alle drei Sprachkategorien nebenläufig bei allen Fragestellungen behandelt werden müssen, möchte ich bis auf weiteres folgendes Schichtenmodell für die sprachliche Beschreibung von Musik vorschlagen, und diese zunächst willkürlich erscheinende Schichtung dann natürlich auch erläutern (s. Abb. 3. 1):

Sprachtyp	Anwendung
kontext - frei	globale Strukturen (Themen, Durchführung, Exposition)
kontext - sensitiv	komplexere Grundstrukturen (Motive, Überleitungen, Verzierungen)
regulär	regelmäßige Grundstrukturen (Dreiklänge, Tonleitern, etc.)

Abb. 3. 1: sprachliches Schichtenmodell

Auf der untersten Ebene finden sich regelmäßige Grundstrukturen wie Dreiklänge, Tonleitern, Läufe etc., wie sie durch reguläre Sprachen leicht beschrieben werden können. Die zugehörigen, regulären Ausdrücke gestatten es, in einfacher Form eine Fülle variierender Erscheinungsformen, z. B. eines C - Dur - Dreiklanges, einer Ergebnis - Metavariablen "CI" zuzuordnen, wie es z. B. mit dem endlichen Automaten in Abb. 2. 14 demonstriert wurde.

Auf der mittleren Ebene finden sich oftmals komplexere Grundstrukturen wie Motive, Überleitungen, Verzierungen, welche Varianten von regelmäßigen Strukturen darstellen können. Zu deren Beschreibung eignen sich insbesondere kontextsensitive Sprachen, die es gestatten, spezielle kontextabhängige Varianten durch zusätzliche Prozeduren zu berücksichtigen. In Abschnitt 2.   war die Grundfigur des 8. Préludes von Chopin auf diese Weise abgeleitet worden.

Auf oberer Ebene finden sich globale Strukturbäume zur Beschreibung der syntaktischen Zusammenhänge größerer und mittlerer Abschnitte der Art Sonate, Exposition, Themen, Motive. Zu deren Betrachtung eignen sich besonders kontextfreie Sprachen. Die Mechanismen zu deren Analyse waren anhand des Kellerautomaten besondes ausführlich behandelt worden und sollen nun im Folgenden auch immer wieder zur Veranschaulichung der dynamischen Abläufe während der Erzeugung und des Hörens von Musik dienen.

3. 2 Vom Erlernen der musikalischen Sprache

3. 2. 1 Verständigung zwischen Komponist und Hörer

Bleiben wir bei unserer Hypothese

"Musik ist eine Sprache"

dann stellt sich die Frage, wie sich Komponist und Hörer eigentlich miteinander verständigen. Ich habe bewußt geschrieben "miteinander verständigen", denn der Musikschaffende beabsichtigt natürlich, daß ein Hörer, auch noch 2oo Jahre später, seine seine Musik versteht, auch wenn er ihm nicht mehr antworten kann. Wie einigen sie sich über ihr Vokabular, ihre Grammatik, ihre Semantik? Hinzu kommt, daß es natürlich nicht nur eine musikalische Sprache gibt, sondern beliebig viele:

- Bachisch	- Brahmsisch
- Mozartisch	- Wagnerisch
- Beethovenisch	- Schönbergisch
- Chopinisch	- Stockhausenisch
•	•
•	•
•	•

Wodurch sind wir in der Lage, einzelne Werke zu verstehen? Durch wiederholtes Hören, durch jahrelange Beschäftigung mit der Musik, durch jahrhundertelange Tradition von Geburt an, oder durch spezielle Ausbildung?

Gehen wir nochmal zurück zum vertrauten Beispiel der natürlichen Sprachen. Jeder Mensch lernt in seinem Leben mindestens eine Sprache, bestehend aus dem Vokabular und den syntaktischen, grammatikalischen Regeln samt der Bedeutung.

Obwohl das Vokabular begrenzt und die Anzahl der Regeln endlich und meist gar nicht so groß ist, besitzen die natürlichen Sprachen die phantastische Eigenschaft, unendlich zu sein: Wir können Sätze bilden, die völlig neu sind und können Sätze verstehen, welche wir noch nie gehört haben.

Durch unsere Beschäftigung mit Chomskys generativen Grammatiken wissen wir, warum dies so ist: Die Produktion selbst einfacher Grammatiken wie die der Grammatik G_0 zur Bildung arithmetischer Ausdrücke, enthält die Möglichkeit zur Ableitung beliebig vieler und langer Symbolfolgen. Es hängt nur von den Ableitungsregeln ab.

Rekapitulieren wir nocheinmal: Eine Sprache war definiert durch

- Alphabet

- Grammatik G, bestehend aus:
  - Terminalen T
  - Nichtterminalen N
  - Produktionen P
  - Startsymbol S

- Semantik

Welche dieser Bestandteile sind fest vorgegeben, welche müssen erlernt werden und welche nicht?

Fangen wir zunächst mit dem Alphabet an. Wie wir bereits gesehen haben, handelt es sich hierbei um die vom Hörer wahrnehmbaren

- Töne einschließlich
- Pausen

sowie ggfs. zur Unterscheidung gleicher Töne wahrnehmbare

- Tondauer
- Tonstärke
- Betonung
- Artikulation etc.

innerhalb eines *Tonsystems*, wobei anstelle von Tönen ebenso Klänge stehen können (?). Wegen ihres elementaren, akustischen Charakters heißen diese Terminalsymbole T auch *Phoneme*. Wir wollen annehmen, daß uns die jeweiligen Tonsysteme, z. B. der abendländischen Musik, von Kindesbeinen an vertraut sind, und es keines gesonderten Lernvorgangs bedarf. Insoweit ist der Anfang einfach.

Ebenso einfach wollen wir es uns zunächst am Ende des Wahrnehmungsprozesses machen und etwas tun, was bei den natürlichen Sprache absolut ungewöhnlich ist:

Wir vernachlässigen zunächst die Semantik

Wir wollen uns also nicht dafür interessieren, welche Bedeutung ein musikalischer Ausdruck besitzt. Die Semantik, die in [Bern76] einen breiten Raum einnimmt, wollen wir erst einmal komplett zurückstellen.

Damit können wir uns jetzt voll auf die Betrachtung der

- Terminale
- Nichtterminale
- Produktionen

konzentrieren, wobei das Startsymbol S als ausgezeichnetes Symbol zu den Nichtterminalen zählt.

Nachdem wir die Problemstellung in dieser Weise eingegrenzt haben, wollen wir nochmals die Frage wiederholen: Wie verständigen sich Komponist und Hörer miteinander, wie lernt der Hörer die musikalische Sprache, um diese anschließend zu verstehen und wie bringt der Komponist den Hörern seine Sprache bei, damit diese anschließend in der Lage sind, seine Musik zu verstehen?

Aus dem bisher Herausgefundenen läßt sich auf diese Frage erst einmal folgende Zwischenantwort geben: Der Komponist definiert in einer noch genauer zu ergründenden Weise

- Terminale
- Nichtterminale und
- Produktionen

d. h.

- die Syntax der Sprache,

in der er sich seinem Hörer mitteilen will. Anders ausgedrückt:

Der Komponist muß in seinen Werken die Sprache definieren und seinen Hörern beibringen, die diese zum Verständnis seines Werkes benötigen. Dies muß grundsätzlich in jedem Werk von neuem erfolgen.

Diese Betrachtungsweise unterscheidet sich fundamental von der klassischen, welche z. B. lautet:

Eine Sonate besteht aus:

- Exposition
- Durchführung
- Reprise

wobei die Exposition mit einem

. 8 - taktigen Thema

beginnt, auf welches ein 2. Thema folgen kann.

In unserer Betrachtungsweise könnte dieses lauten: Zu Beginn des Werkes definiert der Komponist die Sprache, in welcher er zu uns sprechen will. Dies geschieht z. B. in der Exposition. Er beginnt dabei mit einem Kern der Sprache, bestehend aus den wichtigsten Nichtterminalen samt syntaktischer Ableitungsregeln, welche im sogenannten 1. Thema vorgestellt werden. Dieser Sprachkern wird im Verlaufe der Exposition um zusätzliche Nichtterminale und Ableitungsregeln erweitert, welche in der Durchführung in unterschiedlichster Form zur Anwendung kommen. In der Reprise wird der Stoff nocheinmal wiederholt, damit der Hörer sicher ist, ihn auch richtig verstanden zu haben.

Der wesentliche Unterschied ist klar: In der klassischen Betrachtung steht die statische Stuktur, d. h. die Architektur der fertigen Komposition im Vordergrund, während unser Hauptaugenmerk auf die dynamischen Prozesse gerichtet ist, welche beim Komponieren (und auch beim Interpretieren (s. u.)) und Zuhören ablaufen, um diese statische Struktur aufzubauen.

Unterschiedliche Betrachtungsweisen sind nur dann von Nutzen, wenn sie zu anderen Erkenntnissen führen. Bevor wir jetzt noch versuchen wollen, zu neuen (?) Erkenntnissen vorzustoßen, müssen wir uns zunächst noch mit den Mechanismen genauer vertraut machen, die wir auf dem Weg dorthin benötigen.

3. 2. 2 Das musikalische Vokabular

Wie in der natürlichen Sprache müssen wir auch in der Musik unterscheiden zwischen:

allgemein	natürliche Sprachen	Musik	Laute	Grammatik
Alphabet:	Buchstaben	Töne:	Phoneme	Terminale
Vokabular	Wörter	Motive, Klänge:	Morpheme	

Tab. 3. 1: Gegenüberstellung sprachlicher Grundbegriffe

wobei Motive im Extremfall auch nur aus einem einzelnen Ton bestehen können.

Doch was sind Motive? Sind das Terminale oder bereits abgeleitete Nichtterminale?

Gehen wir zur Klärung sicherheitshalber zu den natürlichen Sprachen zurück und betrachten den Unterschied zwischen Buchstaben und Wörtern, bzw. zwischen Phonemen und Morphemen. Uns ist allen vertraut, daß sich unsere Sprache zwar aus klanglichen Atomen, bzw. aus Buchstaben aufbaut, jedoch verständigen wir uns nicht mit Hilfe einzelner Buchstaben oder Laute, sondern Folgen davon, eben sogenannter Worte oder Phoneme. Wir besitzen in unserem Gedächtnis ein Wörterbuch, in welchem diese Worte (zumeist mit einer Bedeutung) eingetragen sind.

Wie ist ein Wort syntaktisch definiert? In der Schriftsprache verstehen wir darunter die Folge von Buchstaben zwischen zwei Zwischenräumen oder zwischen einem Zwischenraum und einem Interpunktionszeichen.

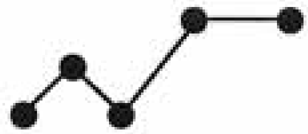
<wort> s -> < Buchstabenfolge> < Interpunktionszeichen>

In der Musik gibt es zwar Zwischenräume in Gestalt von Pausen oder Zäsuren, aber diese trennen nicht notwendigerweise einzelne Motive. Betrachten wir ein Beispiel (Mozart Klaviersonate A - Dur, KV 331 1. Satz)

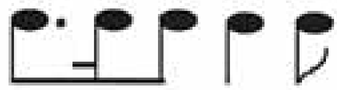
Abb. 3.2: Beginn der Klaviersonate A - Dur, KV 331 von Mozart

Wenn wir den 1. Takt des Themas hören,

und uns bemühen, so zu tun, als hätten wir das Stück noch nie gehört, und uns fragen, was wir an syntaktischer Information bis zum Ende des 1. Taktes gelernt haben, so müssen wir gestehen, daß wir zunächst etwas unsicher sind. Wir haben einzelne Eigenschaften gehört, wie:

- Melodievorlauf: 

- Harmonie: Dur - Dreiklang
  (evtl. Tonika)
  A - Dur (falls absolutes Gehör)

- Rhythmus: 

-Metrum: 6/8 Takt ?

- Begleitung: Unisono zur Melodie

-(Baßlinie) (Dezimen - Parallelen)

- Abhängigkeiten: Melodiehaupttöne sind harmonieeigen

jedoch können wir daraus noch keine Gesetzmäßigkeiten ableiten. "Keine Gesetzmäßigkeiten ableiten" soll dabei heißen, daß wir nach dem ersten Takt nicht wissen können, wie das Stück weitergeht. In unserer linguistischen Betrachtungsweise heißt dies, daß wir nicht wissen, welche syntaktische Struktur wir für das Gehörte aufbauen sollen. Haben wir ein "Wort" oder mehrere gehört? D. h. welches sind die Nichtterminalen, die wir den einzelnen Tönen zuordnen müssen?

Diese Unsicherheit ist sofort beseitigt, wenn wir den 2. Takt hören:

Vergleichen wir einzelne Eigenschaften des 2. mit dem des 1. Taktes, so stellen wir eine vollständige Übereinstimmung fest, mit Ausnahme der

Harmonie: Dreiklang:
Dominante (D^{6}_{4})
(ziemlich sicher jetzt)
E - Dur (falls absolutes Gehör)

Mit dem 2. Takt haben wir plötzlich syntaktisch ungeheuer viel dazugelernt. Durch die Wiederholung haben wir nicht nur festgestellt, daß die Eigenschaften des 1. Taktes syntaktisch abgeschlossen sind, sondern konnten gleichzeitig noch *variante* und *invariante* Eigenschaften unterscheiden. Unter Varianten wollen wir solche Eigenschaften verstehen, die sich verändern, z. B.:

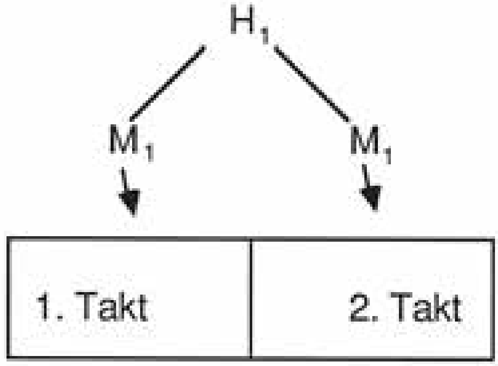
- Harmonie

1. Takt:	A - Dur	(T)
2. Takt:	E - Dur	(D^{6}_{4})

unter Invarianten solche, die sich nicht verändern

- Melodie
- Rhythmus
- Begleitung

Wir können damit schon die ersten Nichtterminale identifizieren, z. B. den Ton



mit

$H_1 \rightarrow M_1\ M_1$ $\qquad$ H_1: 1. Hauptmotiv
M_1: 1. Motiv

wobei wir unter Verwendung der Eigenschaften als Attribute der Nichtterminalen schreiben können:

H_1 = H_1 (Invarianten (M_1))
= H_1 (Melodie, Rythmus, Begleitung)

M_1 = M_1 (Varianten)
= M_1 (Harmonie)

Wir haben bei dieser Schreibweise von der Unterscheidung von Varianten und Invarianten Gebrauch gemacht und die Varianten eines Ausdrucks als Attribute bei diesem belassen und die Invarianten quasi "vor die Klammer" gezogen und dem übergeordneten Nichtterminal zugeordnet. Wir werden dieses Prinzip später noch verallgemeinern.

Nach 2 Takten haben wir bereits

- M_1 als sich wiederholenden Ausdruck erkannt, den wir durch ein Nichtterminal beschreiben können.
- H_1 als erstes M_1 übergeordnetes Nichtterminal erkannt, welches mindestens der Ableitungsregel

$$P_1^1 : H_1 \quad \text{--->} \ M_1 M_1$$

gehorcht.

Wie geht es im 3. Takt weiter? Wenn wir unsere Ableitungsregel P_1^1 verallgemeinerten und einfach schrieben:

$$P_1^2 : H_1 \quad \text{--->} \ M_1^*$$
$$\text{--->} \ M_1, M_1, M_1 \ldots$$

so erhielten wir folgende Fortsetzung z. B.

Wenn wir dieses anhören, stellen wir schnell fest, daß diese Fortsetzung langweilig wäre. Langweilig, weil wir das Ableitungsgesetz verstanden haben und wir eine nochmalige Bestätigung als überflüssig empfänden.

Mozart hat aus diesem Grund (nehmen wir eimal an) auf eine weitere Wiederholung verzichtet, und den Hörer aufnahmebereit für den nächsten syntaktischen Konstrukt gehalten.

Bevor wir dieses jedoch weiter betrachten, wollen wir uns noch einmal vergegenwärtigen, wie wir die ersten syntaktischen Zusammenhänge herausgefunden haben.

1. Wir haben zunächst einmal den Notentext (des 1.Taktes) erfaßt und verschiedene z. T. voneinander abhängige Eigenschaften (Attribute, Merkmale, Parameter) extrahiert.

2. Mit der Wiederholung mehrerer Eigenschaften im 2. Takt haben wir einen Vergleich mit bereits Gehörtem angestellt, was auch als

   "Pattern - Matching"

   bezeichnet werden kann und einen ganz elementaren Zeichenerkennungsvorgang darstellt [Nils65].

Dieser Mechanismus ist elementar für alle lernenden Systeme. Wir lernen beispielsweise die Ziffer 1 oder den Buchstaben A dadurch, daß wir unterschiedliche Ausführungsformen betrachten

1 : **1** 1 1 1 1, I,...

A : **A**, A, A, A, A, A...

3. Gleichzeitig lernen wir, zwischen varianten und invarianten Eigenschaften zu unterscheiden:

   - Die Varianten dürfen sich ändern, ohne daß dieses für das betrachtete Muster erheblich ist (d. h. das Muster bleibt in der gleichen (syntaktischen Kategorie).

   - Die Invarianten dürfen sich nicht ändern, wobei dies anderenfalls erheblich wäre (d. h. das Muster bliebe nicht mehr in der gleichen (syntaktischen) Kategorie).

Die Frage, welche Varianten kategorieerhaltend sind, ist allgemein gar nicht so einfach zu beantworten: Betrachten wir z. B. die klassischen Varianten eines Themas in der Fuge mit

- Thema
- Umkehrung
- Krebs
- Umkehrung des Krebses,

so stellen wir fest, daß es sich hierbei offensichtlich um ein subjektives Wahrnehmungsproblem handelt:

- Der eine Hörer ist möglicherweise in der Lage, die Umkehrung des Krebses als Variante des Themas zu erkennen.

- Ein anderer Hörer wird dieses möglicherweise als völlig neues Thema ansehen und keinen Zusammenhang herstellen können.

Kehren wir zurück zu der Frage, woran wir ohne weitere Vorinformation syntaktische Metasymbole ("Worte", Phoneme, Nichtterminale) erkennen können.

Wir wollen hierfür allgemein die syntaktische Variable *Wortbegrenzer* einführen. Ein musikalischer Text läßt sich also darstellen als Folge von "Morphemen", welche jeweils durch Wortbegrenzer getrennt sind.

< Morphem > -> < Terminalfolge > < Begrenzer >

mit

< Begrenzer > -> < Ende eines bereits bekannten Morphems > /
< Beginn eines bereits bekannten Morphems>

wobei wir < Morphem >, wie wir noch sehen werden, ersetzen können durch eine beliebige < Metavariable >

- < Thema >
- < Satz >
etc.

Bevor wir diese Definition eines Morphems festschreiben und darauf aufsetzen, sollten wir uns nochmals folgende Eigenschaft klarmachen:

Die Definition ist rekursiv, d. h. das Morphem ist durch sich sebst definiert. In solchen Fällen ist höchste Wachsamkeit geboten, denn Begriffe durch sich selbst zu definieren, gilt allgemein als Tautologie. Veranschaulichen wir uns das Problem zunächst wieder am Beispiel der natürlichen Sprache. Jedes Kind in Deutschland kennt den berühmten

"Donaudampfschiffahrtsgesellschaftskapitän"

und weiß, daß dieses Wort sich aufgrund der im Deutschen erlaubten *Konkatenation*, d. h. einer Verkettung aus einzelnen Begriffen zusammensetzt. Einer der deutschen Sprache nicht mächtiger Hörer wird dieses Wort syntaktisch als 1 Morphem erkennen, genauso , wie wir nicht in der Lage sind, folgendes finnische bzw. schwedische Wort näher zu analysieren

taiturikamarimunsikkotyyppiä
Sparvagnsaktiebolagsskensmutsskjutarefackföreningspersonalbekladnadsmagasinsförradsförvaltaren

Genauso ist es bei der syntaktischen Analyse musikalischer Morpheme. Bei erstmaligem Hören liefert uns das "Pattern - Matching" eine bestimmte syntaktische Einheit, die wir zunächst nicht weiter aufzulösen vermögen. Falls im weiteren musikalischen Text einzelne Tonfolgen (Motive, Phoneme) als eigenständige Morpheme erkennbar werden, sind wir jedoch ohne weiteres in der Lage, eine weitere, syntaktische Zwischenschicht (oder - schichten) einzuziehen. Die ist gleichzeitig natürlich auch der Vorteil der rekursiven Morphemdefinition. Wir definieren das Morphem nicht explizit, sondern durch eine einfachere Version seiner selbst. Wir werden dies später bei der ausführlichen Behandlung des Rekursionsprinzips als ganz allgemeines Prinzip erkennen [Hof79].

Erhärten wir unsere "Pattern - Matching - Theorie" nochmals an zwei weiteren Beispielen:

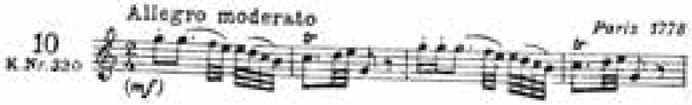


Abb. 3.3 : Beginn der C - Dur - Sonate KV 330 von Mozart

Abb.3. 4 : Beginn der c - moll - Sonate op. 31, von Beethoven

Es sei dem Leser überlassen, die erkennbaren Metavariablen in beiden Themen zu identifizieren und die zugehörigen Varianten und Invarianten anzugeben.

3. 3 Wortkategorien

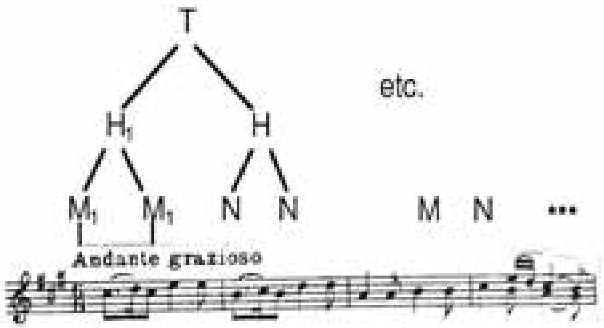
In den natürlichen Sprachen sind wir gewohnt, Worte entsprechend ihrer Bedeutung oder syntaktischen Funktion verschiedenen Kategorien zuzuordnen. Wir unterscheiden dabei bezüglich der Bedeutung z.B. zwischen

- Substantiv : Hund, Mann
- Verb : beißen
- Adjektive : vorsichtig
- Artikel : der

sowie der syntaktischen Funktion zwischen

- Subjekt : Der Hund
- Prädikat : beißt
- Objekt : den Mann
- Adverbiale Bestimmung : vorsichtig

Gibt es etwas analoges in der Musik? Aufgrund der bisherigen syntaktischen Analyse mit Hilfe des "Pattern - Matching"



müßten wir diese Frage zunächst einmal mit einem klaren "Nein" beantworten, da wir quasi mechanisch Metavariable abgeleitet haben. Wir haben weder nach deren syntaktischer Stellung, noch, wie vereinbart, nach der Bedeutung gefragt. Sind diese Vereinfachungen noch länger aufrecht zu erhalten? Bezüglich der Bedeutung von musikalischen Ausdrücken wollen wir nach wie vor standhaft bleiben, jedoch bezüglich möglicher unterschiedlicher "Wortkategorien" selbstkritisch sein. Haben wir nicht bei der Identifizierung von Morphemen Eigenschaften wie

- Melodie
- Harmonie
- Rhythmus
- Begleitung

etc.

eingeführt und diese noch dazu in Variante und Invariante unterschieden. Haben wir es dabei nicht möglicherweise mit unterschiedlichen Kategorien wie

- Substantiv
- Verb
- Adjektiv

etc.

zu tun.

Bevor wir die Analogie zwischen Musik und natürlichen Sprachen bezüglich der Wortkategorien weiterverfolgen, wollen wir uns zunächst noch einmal die Klassifizierungsmechanismen in der natürlichen Sprache bewußt machen und sehen, ob bzw. welche Probleme es dabei gibt. Nehmen wir z. B. einmal das einfache Wörtchen

"gut",

so kann dies den Kategorien

Substantiv:	Besitz allgemein z.B. "großer Bauernhof" "Note 2"
Adjektiv:	wertvoll, positiv z.B. "guter Freund"
Adverb:	positiv verstärkend z. B. "gut gemeint"

Suffix: spezieller Besitz
(z. B. "Strandgut")

zugeordnet werden. Weitere Beispiele ließen sich beliebig anfügen.

Das Problem ist, daß sich unterschiedliche Klassifikationsschemata finden lassen je nach

- Bedeutung
- syntaktischen Funktion

und diese Kategorien weitgehend unabhängig voneinander sind.

Welchen Weg sollen wir in der Musik einschlagen, wenn das Problem schon in der natürlichen Sprache, mit der wir glauben, vertraut zu sein, nicht eindeutig lösbar ist?

Bevor wir uns entscheiden, wollen wir uns nocheinmal den Eigenschaften "Melodie", "Harmonie", "Rhythmus" zuwenden und versuchen, deren sprachliche Funktion zu verstehen. Wir hatten, um eine Metavariable zu beschreiben, formal einfach geschrieben z. B.:

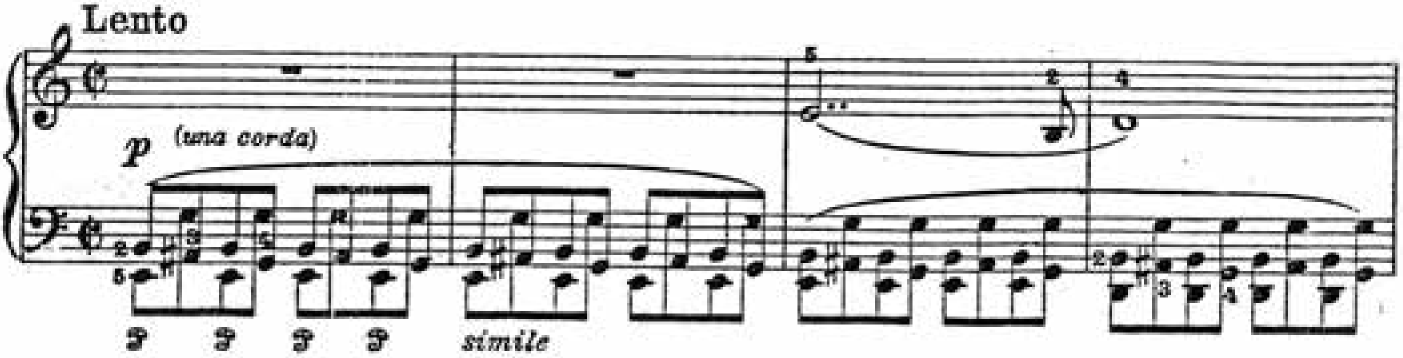
- S (Melodie, Harmonie, Rhythmus etc.)

und die Metavariable damit "attributiert". Die Rechtfertigung hierfür besteht darin, Metavariablen mit gleichen oder ähnlichen Attributen der gleichen Klasse zuordnen und damit als syntaktisch gleichartig behandeln zu können. Dies entspricht durchaus unserer subjektiven Empfindung.

Sind die Attribute aber nun vollständig unabhängig voneinander, sind sie gleichberechtigt, sind sie autonom oder können sie nur in bestimmten Kombinationen auftreten? Wieviele Attribute und welche schließlich sind erforderlich, damit man überhaupt von einer Metavariablen sprechen kann?

Untersuchen wir zunächst einmal die Unabhängigkeit an folgenden Beispielen, mit jeweils nur einem Attribut:

- a) Melodie



- b) Harmonie: 2. Prélude op. 25 von Chopin

- c) Rhythmus aus dem "Bolero" von Ravel

<u>Abb. 3.5:</u> Motive mit unterschiedlichen Attributen

Die meisten Leser werden wohl auf Anhieb zustimmen, daß es sich bei sämtlichen Beispielen um vollständig eigenständige musikalische Ausdrücke handelt, die nicht notwendigerweise der Ergänzung durch andere Attribute bedürfen. Jede Attributkategorie kann somit offensichtlich grundsätzlich alleine auftreten und reicht aus, um eine Metavariable zu spezifizieren.

Wir können damit schreiben:

-S (Melodie, - , -, ...)
-S (- , Harmonie, - ...)
-S (-, - ,Rhythmus, ...)

oder natürlich auch:

- S (Melodie, Harmonie, - , ...)
-S (- , Harmonie, Rhythmus, ...)
etc.

Je mehr Attribute angegeben werden, umso genauer wird eine Metavariable beschrieben. Wir wollen wieder die Bestätigung für diese Modellvorstellung auf der sprachlichen Seite suchen. Betrachten wir z. B. die Wortfolgen

Hirt
flötender Hirt
leise flötender Hirt
unerträglich leise flötender Hirt
dauernd unerträglich leise flötender Hirt

Wir sehen zunächst die Analogie der schrittweise Attributierung. Einen wesentlichen Unterschied müssen wir jedoch feststellen: In der natürlichen Sprache werden die Attribute zu einem Hauptwort wie im Beispiel durch zusätzliche Worte ausgedrückt, die zeitlich aufeinander folgen, während es in der Musik Attribute gibt, die gleichzeitig auftreten können. Wir haben es in der Musik mit einem echten "mehrdimensionalen" Eigenschaftsraum zu tun, bei dem die einzelnen Richtungen zunächst unabhängig voneinander sind. Natürlich gibt es bei "guter" Musik starke Abhängigkeiten der Attribute voneinander, weswegen wir diese eben als "schön" empfinden.

Ein Beispiel für das besonders gute Zusammenpassen einzelner Attribute mit sich gegenseitig verstärkender Wirkung ist das folgende:

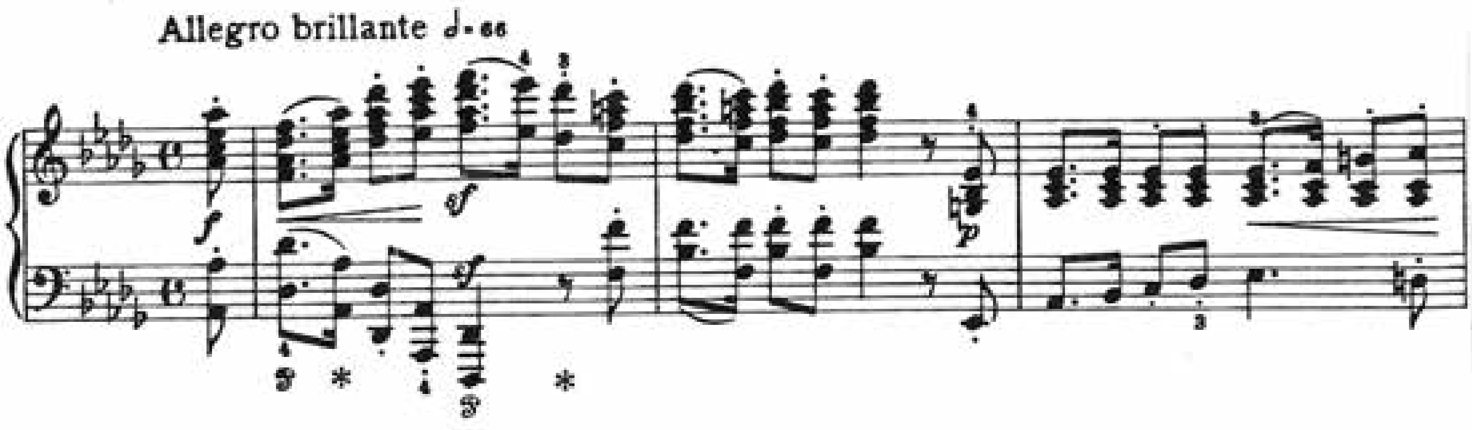


Abb. 3. 6: Finale der symphonischen Etüden op.13 von Schumann (Anfang)

Hier passen Melodie, Harmoniefolge, Rhythmus, Dynamik in so trefflicher Weise zusammen, daß man ohne jeden Zweifel den Eindruck größter Fröhlichkeit empfindet.

Vorsicht! Gerade haben wir, ohne daß wir es wollten, gegen einen unserer ehernsten Grundsätze verstoßen, nämlich nicht von Semantik zu sprechen. Also wollen wir es lassen, auch wenn wir erschrocken vermerken, daß offensichtlich zwischen Syntax und Semantik doch keine so strikte Trennung möglich ist.

Damit wir uns jedoch semanische Exkurse als gefährlich abgewöhnen, erinnern wir uns folgender schöner, syntaktisch korrekter Kinderverse der natürlichen Sprache:

"Dunkel war´s, der Mond schien helle,
Als ein Wagen blitzeschnelle
Langsam..."

Fassen wir nochmals zusammen:

Wir hatten diesen Abschnitt begonnen mit der Suche nach musikalischen Wortkategorien und uns dabei eine Menge klargemacht über musikalische Attribute, deren Abhängigkeiten untereinander, sowie deren Bedeutung für die Metavariablen. Wir haben daraus jedoch bisher noch keine Wortkategorien ableiten können, im Sinne natürlicher, syntaktischer Variblen, wie wir sie aus dem Grammatikunterricht kennen. Wir führen dies u. a. darauf zurück, daß wir den musikalischen Metavariablen bisher keine Bedeutung zuordnen konnten, auch wenn wir zuletzt dicht daran waren.

Es bleiben also nach wie vor bei der allgemeinen Definition der Metavariablen

- $S = S(a_1, \dots a_j, \dots a_n)$ mit a_j = Attribute,

die uns weiterhin alle Freiheiten bezüglich der Grammatikdefinition erhält. Nachdem wir uns so einen Überblick über die syntaktischen Eigenschaften der kleinsten, sprachlichen Einheit, des Morphems oder auch "Wortes" verschaft haben, wollen wir erste Mechanismen zur Analyse der größten syntaktischen Einheit, des

- Satzes

behandeln.

3. 4 Satzanalyse

3. 4. 1 Begriffe

Bei den formalen Sprachen definieren wir als *Satz* eine Folge von Wörtern aus dem Vokabular der Sprache, welche mit Hilfe einer Menge von Funktionen aus einem Startsymbol S abgeleitet werden kann.
Wir haben hierfür geschrieben:

$$S \dashrightarrow l$$
$$l \dashrightarrow r \qquad l, r \in (N \cup T)^+$$

Bei den natürlichen Sprachen verstehen wir unter *Satz* die größte, syntaktisch abgeschlossene Einheit. Ein natürlichsprachlicher Satz kann seinerseits wieder eingebettete Sätze enthalten wie

- Nebensätze
- Relativsätze
- Infinitivsätze,

die zur Unterscheidung von Gesamtsätzen (engl. Sentence) gelegentlich auch mit (engl. clause) bezeichnet werden ([Win 82], [AuTü 70]). Der natürlichsprachliche, übergeordnete Satz entspricht dabei dem formalen, aus dem Startsymbol S abgeleiteten Satz.

In der Musik versteht man unter einem Satz zum einen eine Grundform, z.B. aus 8 Takten, auch als Periode bezeichnet, zum anderen einen Teil der Sonatensatzform [Herz 57] Auch wenn sich die musikalischen Satzbegriffe, weder untereinander noch mit den natürlichsprachlichen und den formalen decken, kommt der erstere, synonym als Periode bezeichnete, den übrigen am nächsten. Wir wollen dennoch den musikalischen Satzbegriff dem formalen angleichen und ihn deswegen in der Form verallgemeinern, daß wir darunter eine syntaktisch abgeschlossene Folge von Morphemen verstehen wollen. Das kann im Minimalfall z. B. eine Periode sein, im Maximalfall der ganze Satz einer Symphonie oder die mehrsätzige Symphonie selbst.

Mit dieser sehr allgemeinen Satzdefinition wären wir beinahe über ein Problem eilig hinweggegangen, welches uns später, bei der Gesamtanalyse eines musikalischen Stückes erhebliches Kopfzerbrechen bereiten könnte. Betrachten wir zur Erläuterung des Problems noch einmal den Strukturbaum des früheren Beispiels der Mozart - Sonate (s. Abb. 1.5)

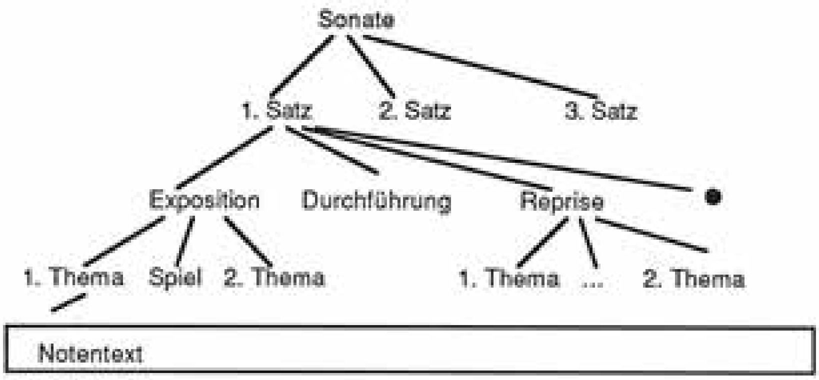
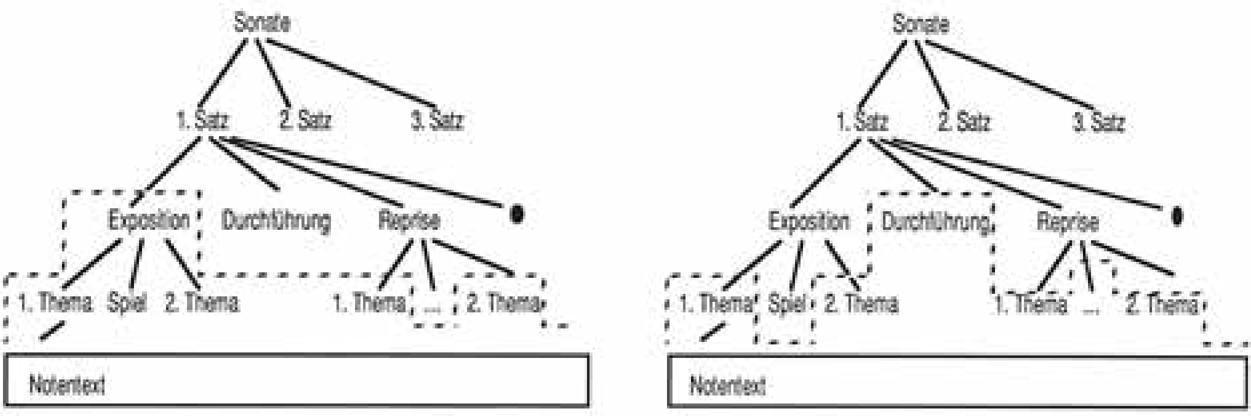


Abb. 3. 7 :Strukturbaum einer Sonate

Wenden wir die "maximale" Satzdefinition an, so entspricht Abb. 3.7 dem gesamten abzuleitenden Syntaxbaum. Wählen wir "kleinere" Satzdefinitionen, so erhalten wir eine größere Anzahl von Syntax - Teilbäumen,



a) Variante I b) Variante II

Abb. 3.8: Syntax - Teilbäume für "kleinere" Satzdefinitionen

die alle in sich abgeschlossen sind.

Das Problem besteht nun darin: Bei der theoretischen (TOP DOWN) Analyse kann man natürlich leicht von einer Globalstruktur gemäß Abb. 3.7 ausgehen, aber was geschieht beim Hören, welches zwangsläufig

BOTTOM UP erfolgen muß? Bis zu welcher hierarchischen Schicht ist man denn als Hörer überhaupt in der Lage, eine syntaktische Struktur aufzubauen? Kann man denn einen längeren Sonatensatz syntaktisch vollständig aufbauen, sodaß man am Schluß die Gesamtstruktur z. B. gemäß Abb3.7 "im Kopfe hat", oder realisiert man am Schluß eines Satzes syntaktisch nicht mehr, als daß dieser zu Ende ist und erinnert sich lediglich an einzelne Teilstrukturen? Solange wir an dem dynamischen Kommunikationsmodell zwischen Komponisten und Hörer festhalten wollen, müssen wir darauf achten, daß wir den Hörer bezüglich seiner Syntaxanalysefähigkeiten nicht überfordern.

Dies bedeutet, daß wir für die syntaktische Einheit "Satz" fordern müssen, daß diese durch einen Hörer auch eindeutig syntaktisch ableitbar, d.h. wahrnehmbar sein muß. Dies bedeutet, daß wir uns zunächst mit den Strukturelementen eines Satzes beschäftigen müssen.

3. 4. 2 Satzbegrenzer

Die elementarsten Stukturelemente eines Satzes sind neben den Worten samt übergeordneter Nichtterminalzeichen die Satzbegrenzer. Somit können wir schreiben:

abgeschlossener Satz -> Anfangsbegrenzer Satz Endbegrenzer

wobei der abgeschlossene Satz im Gegensatz zum nichtabgeschlossenen die Begrenzer enthält. Bei den natürlichen (Schrift) - Sprachen sind z. B.

- Anfangsbegrenzer : Führende Leerzeichen, Endbegrenzer des vorherigen Satzes, Anfangsapostroph ".

- Endbegrenzer: Interpunktionszeichen . ! ? : ; Endapostrophen ".

In der Musik können wir zunächst allgemein schreiben:

- Anfangsbegrenzer: führende Leerzeichen (Pausen) Endbegrenzer des vorherigen Satzes,

- Endbegrenzer: folgende Leerzeichen (Pausen)
  Anfangsbegrenzer

Betrachten wir die Definition genauer, so haben wir wieder eine rekursive, Definition, die wir durch weitere Festlegungen auflösen müssen.

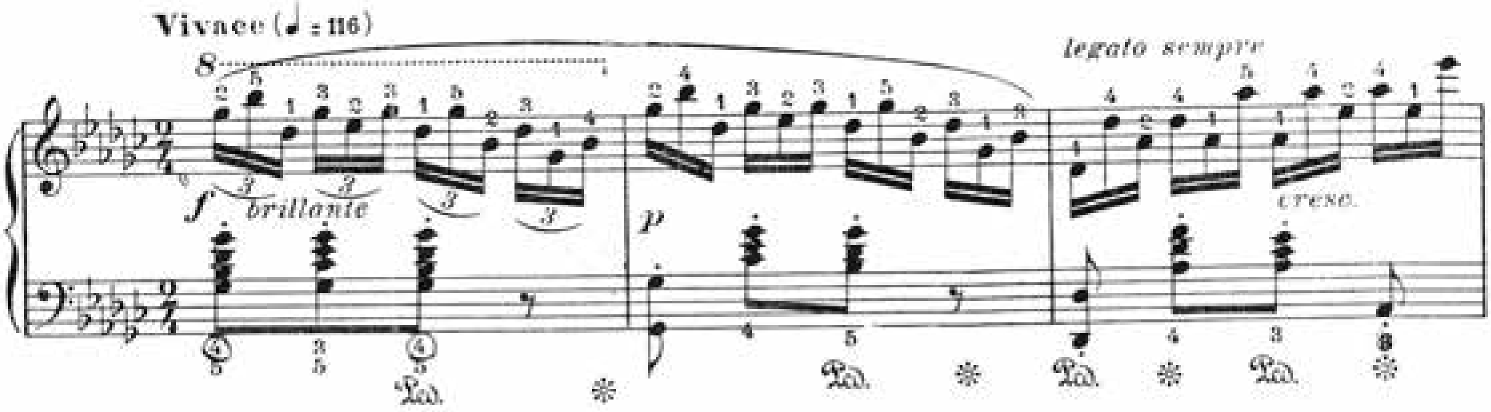
Die Auflösung der rekursive Definition kann dabei ganz einfach über die Zeit erfolgen. Ist ein Anfangsbegrenzer als Satzbeginn erst einmal erkannt, so können wir diesen beim nächsten Auftreten als Endbegrenzer interpretieren. Dies sei an einem Beispiel erläutert (Abb 3.9)

a) Mozart, C - Dur - Sonate

End - Anfangs-

↓ ↓

begrenzer



b) Chopin, Ges - Dur - Etüde

<u>Abb. 3.9:</u> Beispiel für Identität von Anfangs -und Endbegrenzer

Dieser Mechanismus, Endbegrenzer zu definieren, läuft praktisch wieder auf ein "Pattern - Matching" - Verfahren hinaus, nur werden diesmal nicht einzelne Worte, sondern größere syntaktische Einheiten miteinander verglichen.

Studieren wir weitere Beispiele und prüfen, ob wir diese verallgemeinern können:

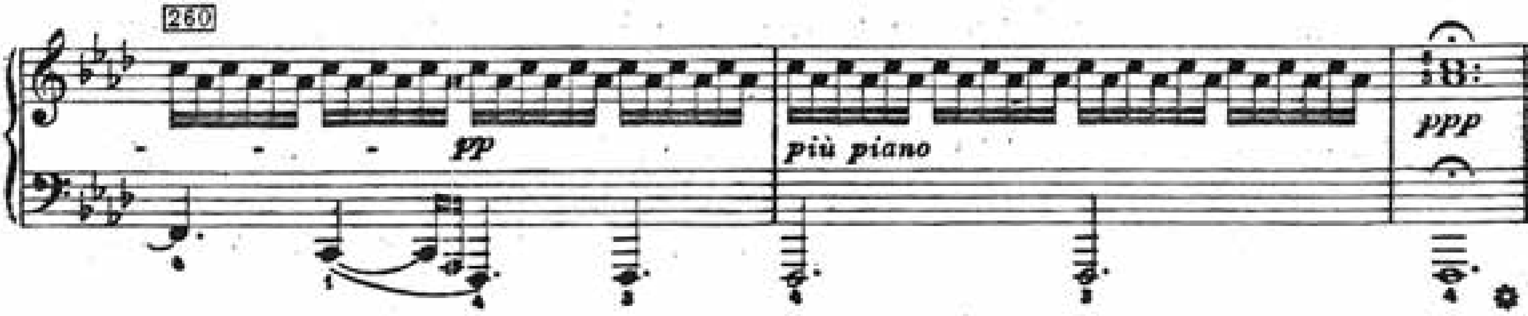


Abb. 3.10 : Schluß des 1. Satzes der Beethoven - Sonate op. 57, "Appassionata"

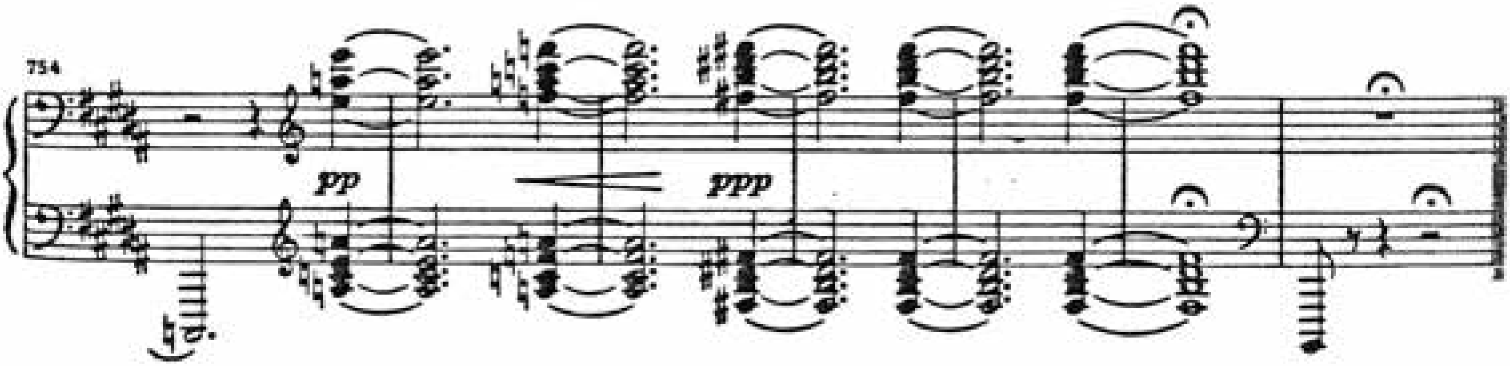


Abb. 3.11 : Schluß der h - moll - Sonate von Liszt.

In beiden Fällen haben wir den Eindruck des Verklingens, welchen wir ohne weitere Bedingung mit

- folgende Leerzeichen (Pausen)
- ggfs. noch pp, ppp

beschreiben können. Diese Art des Satzbegrenzers wollen wir syntaktisch von dem "aprupten" Ende, wie wir es im folgenden zulassen wollen, unterscheiden.

Die wohl bekannteste Form des Begrenzens stellt in der tonalen Musik die Auflösung in die Tonika dar, entweder in der Form

a) D^7 ---> T *"authentischer" Schluß*

oder

b) S ---> T *"plagaler" Schluß*

Eine weitere Verstärkung der Schlußwirkung tritt im Fall a) durch Hinzunahme der Subdominante ein, die zu der Harmoniefolge

c) T ---> S D ---> T *"authentische" Kadenz*

führt. Nach Riemann gilt weiter: "Eine natürliche Schlußwirkung entsteht nur, wenn die abschließende Tonika auf einem Zeitwert eintritt, dem rythmische Schlußkraft eigen ist." [Grab 67]

Syntaktisch ist die Definition der Schlußformen a) bis c) gar nicht unproblematisch, obwohl sie intuitiv die vertrautesten sind. Zur Begründung sei folgendes angeführt:

1. Die Auflösung in die Tonika kann auch an beliebiger Stelle im Satz auftreten.

2. Die genannten Harmoniefolgen werden nur in einem bestimmten Tonsystem als Schlußform empfunden.

3. Es gibt auch in unserem Tonsystem andere Abschlüsse.

zu 2: Die zitierte Riemann - Feststellung deutet bereits darauf hin, daß noch weitere Bedingungen erfüllt sein müssen, um eine vollständige Schlußwirkung zu erzielen.

Zum zweiten, und dies ist unter dem syntaktischem Aspekt wichtig, muß die Schlußwendung *a priori* bekannt sein. Anders ausgedrückt bedeutet dies - eine Auflösung in die Tonika "bedeutet" einen Schluß. Wie tief diese Bedeutung in uns verwurzelt ist, unterstreicht auch die folgende Feststellung[Grab 67]:

> "Die Kadenz ist vollkommenes Abbild der Tonalität. Sie ist die Grundlage unserer abendländischen funktionell bedingten Musik. In ihr vereinigt sich die polare Gegenüberstellung der drei Hauptfunktionen und ihre metrische Einordnung zu vollkommener Eindeutigkeit und tonartlicher Konzentriertheit. Auch in melodischer Beziehung stellt der Verlauf jeder Stimme in der regulären Kadenz vorbildliche Geschlossenheit dar. Ein Großteil klassischer Thematik beruht auf kadenzieller Grundlage."

Wir verlassen damit die rein syntaktische Betrachtung, und stützen uns bereits auf einer semantischen Analyse ab.

zu 3: Das bekannteste Gegenbeispiel zur Auflösung als Schlußform ist wohl das folgende:

Abb. 3.12: D^7 als Schlußakkord in den Kinderszenen op.15 von Schumann "Bittendes Kind".

Hierbei wird der Übergang zur Semantik vielleicht noch deutlicher als bei dem authentischen Schluß. Man hört förmlich das Fragezeichen des bittenden Kindes mit dem obersten Ton des Dominantseptakkordes.

Wir wollen hiermit einstweilen die Schlußformen verlassen, ohne sie damit abschließend behandelt zu haben, zumal wir bei den syntaktischen Strukturen nochmals auf die Kadenz in ihren verschiedenen Ausprägungen zurückkommen wollen.

3. 5. Grundstrukturen

3. 5. 1 Überblick

Unter den Grundstrukturen wollen wir solche syntaktischen Strukturen verstehen, die auf elementaren Ableitungsregeln beruhen. Als solche Grundstrukturen wollen wir betrachten:

- Iteration
- Rekursion
- Zyklus

Diese Strukturen sind völlig unabhängig von den jeweiligen musikalischen Ausprägungen (Attributen) und können als ebensolche auch vom Hörer erkannt werden.

Bevor wir uns mit den Eigenschaften von Iterationen, Rekursionen Zyklen und insbesondere den Unterschieden in der Musik beschäftigen wollen, soll ein wichtiges, erkenntnistheoretisches Prinzip, welches diesen Strukturen übergeordnet ist, behandelt werden, nämlich dasjenige der *Induktion.*

3. 5. 2 Induktion

Karl Popper schreibt in seinem Werk " Objektive Erkenntnis - ein evolutionärer Entwurf" [Pop 71]: "Selbstverständlich kann ich mich irren, aber ich glaube, ein wichtiges philosophisches Problem gelöst zu haben: Das Problem der Induktion. Ich dürfte die Lösung etwa 1923 gefunden haben. Die Lösung erwies sich als außerordentlich fruchtbar und führte mich zur Lösung einer ganzen Reihe weiterer philosophischer Probleme." Er schreibt weiter :"Die Erkenntnistheorie des Alltagsverstandes ist am berühmtesten in Form der Behauptung, es gebe 'nichts in unserem Verstand, was nicht durch die Sinne hereingekommen ist'.... Wir haben Erwartungen und wir glauben fest an gewisse Regelmäßigkeiten (Naturgesetze, Theorien). Das führt uns zum Induktionsproblem des Alltagsverstandes: Wie können diese Erwartungen und dieser Glaube entstanden sein? Der Alltagsverstand antwortet: Durch wiederholt gemachte Beobachtungen in der Vergangenheit"

Aus dem Schulunterricht kennen wir die Induktion unter der Bezeichnung

"Schluß von n auf n + 1"

Beispiel: Wir wollen zeigen, daß

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

für alle natürlichen Zahlen gilt. Dann führen wir den Induktionsbeweis wie folgt:

1. Wir zeigen, daß die Formel für $n = 1$ gilt.
2. Wir zeigen, daß, wenn die Formel für k gilt, sie auch für $k + 1$ gilt:

$$1 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k\,(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$$

welches die Formel für $n = k + 1$ ist. (qed.)

Allgemein sagen wir: Eine Menge S nennen wir eine induktive Menge dann und nur dann, wenn

1. $1 \in S$
2. $(k + 1) \in S$ wenn immer $k \in S$

Das Prinzip der Induktion findet sich nicht nur in der Zahlentheorie, sondern ebenso in der mathematischen Logik (Prädikatenlogik) in folgender Form wieder:

$$A\,(1) \wedge \forall_k\,[(A\,(k)) \rightarrow A\,(k+1)] \rightarrow \forall_n\,[A(n)] \quad \rightarrow \text{ impliziert}$$

welche besagt:

Wenn die Aussage A (1) richtig ist und wenn für alle natürlichen Zahlen k aus (k) stets A (k + 1) folgt, so gilt A (n) für alle natürlichen Zahlen n.

Wenn also eine solche Aussage A für 1 gilt, gilt sie auch für 2, 3, usw., d. h. die Richtigkeit "läuft immer weiter" und es gibt keine natürliche Zahl, die nicht von ihr erreicht wird [Mesch 84].

Betrachten wir hierzu ein musikalisches Beispiel:

Abb. 3.13: ChromatischeTonleiter als induktive Folge.

Wir hören als erstes den Ton c, stellen dann fest, daß auf diesen, ebenso wie auf jeden folgenden, als nächstes wieder ein Halbtonschritt nach oben folgt, und ziehen den Induktionsschluß, daß eine chromatische Tonleiter gespielt wird.

Bei diesem induktiven Schluß, welchen wir ziehen, gibt es jedoch ein grundsätzliches Problem:

Im Gegensatz zum mathematischen Prinzip des vollständigen Induktionsbeweises beruht das gerade angeführte akkustische (physikalische) Induktionsverfahren auf einzelnen, endlichen Beobachtungen und kann damit niemals vollständig sein. Zur Demonstration eines falschen Induktionsschlusses diene das folgende, berühmte Beispiel:

Es soll die Frage beantwortet werden, durch welche Zahlen 120 ohne Rest teilbar ist. Man beginnt mit 1, 2, 3, bis 6 und schließt daraus, daß dies auch für 7, 8 usf. , d.h. für alle Zahlen bis 120 gilt.

Die grundsätzliche Gefahr besteht also darin, eine Verallgemeinerung auf der Grundlage zu weniger Beobachtungen zu wagen. Zwei musikalische Beispiele sollen dies veranschaulichen:

a) Beginn der 1. Fuge aus dem Wohltemperierten Klavier von Bach

b) Beginn der 8. zweistimmigen Invention von Bach

Abb. 3. 14: Beispiel für mögliche falsche Induktionsschlüsse

Im Fall a) könnte man induktiv schließen, es handele sich um den Beginn einer C - Dur - Tonleiter, im Fall b) um einen weiterführenden gezackten Dreiklang.

Die Feststellung, daß ein weiterer induktiver Schluß nicht mehr möglich ist, d. h. die aufgestellte Hypothese über den weiteren Verlauf nicht mehr gültig ist, enthält zwar eine negative Aussage bezüglich der Hypothese, gleichzeitig aber auch eine ebensowichtige, positive Aussage für die syntaktische Analyse:

> **Das Ende einer induktiven Folge stellt einen Begrenzer dar. Dieser Begrenzer definiert den Abschluß eines syntaktischen Terms und den Beginn eines neuen.**

Wir wollen uns dies am Beispiel des Fugenthemas aus dem 3. Satz der As - Dur - Sonate op. 110 von Beethoven klarmachen:

Abb. 3.15: Beginn des 3. Satzes des As - Dur - Sonate op. 110 von Beethoven.

Beim Hören leiten wir zunächst eine induktive Folge, bestehend aus der Sequenz der aufwärtsgerichteten Quartschritte Q ab. Den zugehörigen Strukturbaum zeigt Abb. 3. 16a).

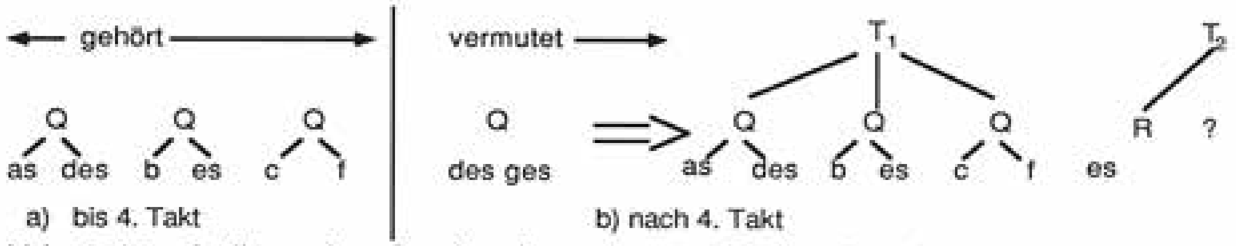


Abb. 3 16: Aufbau des Strukturbaumes am Ende einer induktiven Folge

Durch das "es" des 4. Taktes wird die Folge jedoch beendet. Syntaktisch bedeutet dies, daß für die abgeschlossene Q - Folge eine neue Metavariable, z. B. T_1 anzulegen ist und gleichzeitig eine neue Ableitung, z. B. über T_2 und R beginnt (s. Abb. 3. 16b)). Wir können für die soweit wahrgenommenen Ableitungsregeln schreiben:

1. T_1 -> QQQ
2. Q -> t, t + Quart
3. T_2 -> R
4. R -> ?

Dieses gerade erläuterte Prinzip der Ableitung syntaktischer Konstrukte mittels Induktion (ohne 'a priori ' - Kenntnisse) ist ungeheuer fundamental. Es stellt damit auch eine wichtige Ergänzung der in Abschnitt 3. dargestellten Begrenzervarianten dar.

Wir sind von den natürlichen Sprachen her solche Analysetechniken nicht gewöhnt, weil die Elemente (Worte) unserer Sprache nicht solche schönen, mathematischen Gesetzmäßigkeiten zulassen wie die Musik.

In der Musik sind die Anwendungsmöglichkeiten ohne Zahl. Ein weiteres x-beliebig gewähltes Beispiel ist das folgende, an welchem sich der Leser erproben möge.

Abb. 3.17: 4. Etüde aus op. 10 von Chopin als Beispiel induktiver Folgen

Bevor wir die Anwendung des Induktionsprinzips an weiteren Beispielen studieren wollen, sollten wir uns nochmals genauer mit den erwähnten Strukturformen

- Iteration,
- Rekursion,
- Zyklus,

deren Eigenschaften und natürlich insbesondere deren Unterschiede beschäftigen. Natürlich werden wir dabei auch den Zusammenhang mit dem musikalischen Begriff der

- Sequenz

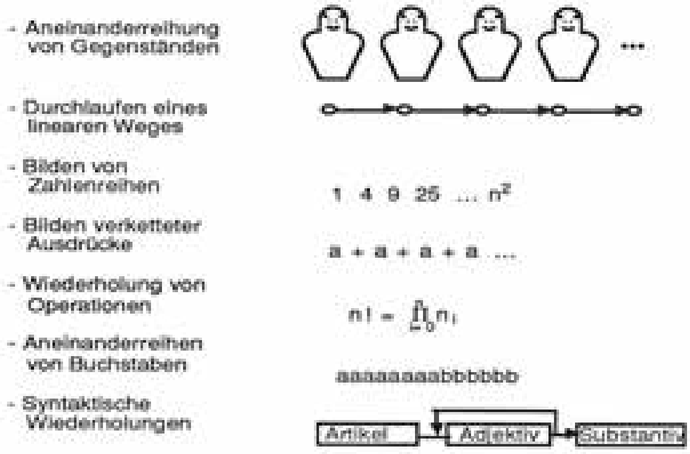
untersuchen, welcher ja unabhängig von den bisherigen Überlegungen entstanden ist.

3. 5. 3 Iteration

3. 5. 3. 1 Allgemeine Erläuterung

Unter Iteration versteht man die mehrmalige (sequentielle) Wiederholung gleicher oder ähnlicher Strukturen.

Beispiele für Iterationen sind:



Tab 3. 2: Beispiele für Iterationen

3. 5. 3. 2 Musikalische Iteration

In der musikalischen Sprache entspricht der Iteration in erster Näherung die Struktur

- Sequenz

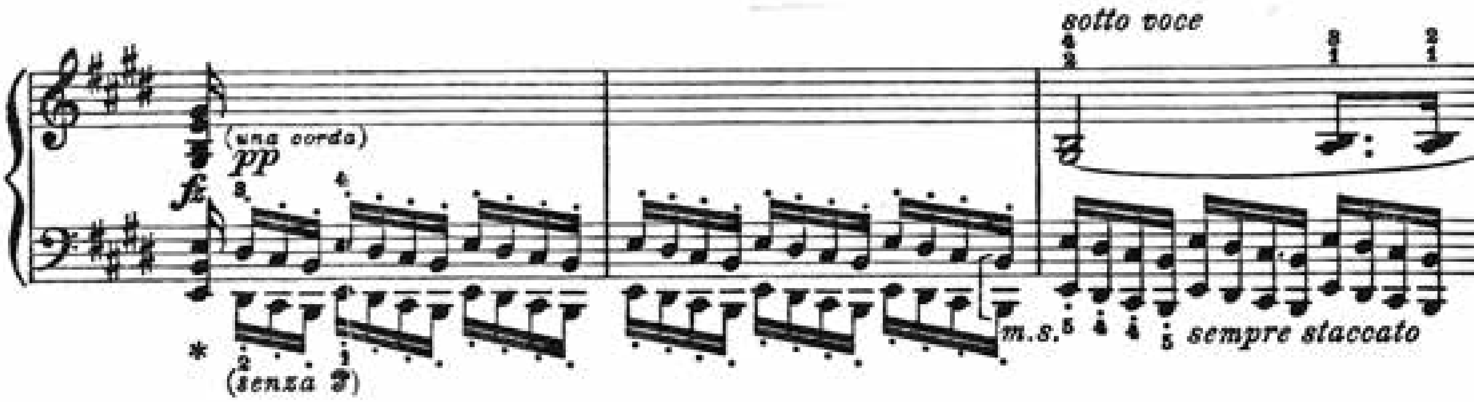
mit dem Sonderfall der

- Repetition

bei identischen Attributen.

Beispiele für eine Sequenz und eine Repetition zeigen die folgenden Abbildungen 3.18 a) und b).

a) Motiv- Sequenzen im 1. Klavierkonzert C - Dur von Beethoven



b) Motiv - Repetitionen in der As - Dur Polonaise op. 53 von Chopin

Abb. 3.18: Musikalische Repräsentation von Iterationen (I)

Die Beispiele für Iterationen in der Musik sind ohne Zahl. Sie beziehen sich dabei nicht nur auf die Form von

- Themen, Motiven

sondern natürlich auch auf

- Rhythmus und
- Harmonien.

Zwei weitere Beispiele mögen dies illustrieren:

a) Beispiel einer rhythmischen Iteration aus dem 5. Klavierkonzert Es - Dur op. 73 von Beethoven

b) Beispiel einer harmonischen Iteration

Abb.3. 19: Musikalische Repräsentationen von Iterationen (II)

Im Beispiel a) besteht die Iteration in einer metrischen Folge von rythmischen Beschleunigungen,

$_3/^8$, $_4/^{16}$, $_6/^{16}$ --> Tremolo

welche dem schnellstmöglichen Metrum, dem Tremolo als Höhepunkt zustrebt. Im Beispiel b) besteht die Iteration aus einer harmonischen Sequenz, welche sich am einfachsten am "diatonischen Quintenzirkel" veranschaulichen läßt:

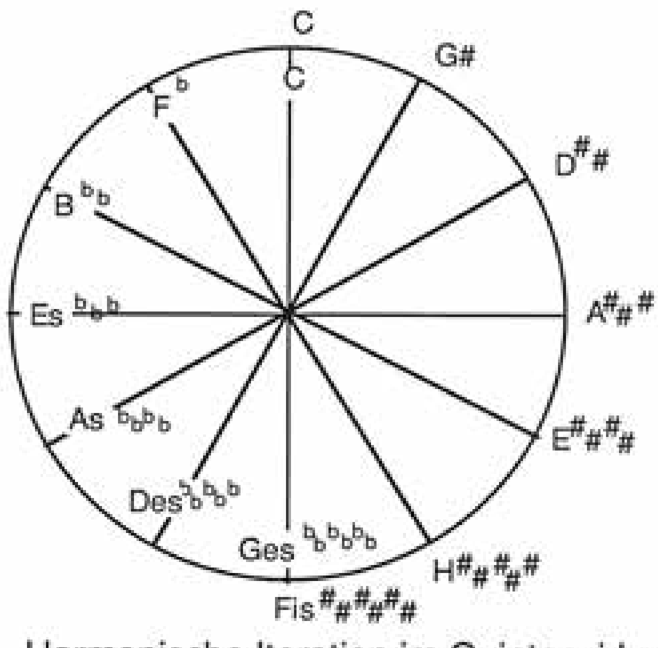


Abb. 3.20: Harmonische Iteration im Quintenzirkel

Aufgrund der 'a priori ' - Kenntnis der diatonischen Harmoniefolge erkennt der Hörer die Gesetzmäßigkeit der Iteration

In unseren formalen Sprachen stellt die Iteration einen

- regulären Ausdruck

der Ableitungsform

$$A \to x^*$$

dar, wobei wir x^* als *Stern- oder Hüllenoperation* (engl. closure) bezeichnen wollen. Diese sehr einfache Operation hat die mächtige Eigenschaft, Folgen des gleichen Grundsymbols beliebiger Länge, d. h. Null, endlich bis zu unendlich erzeugen zu können.

$$
\begin{array}{ll}
A \to & e \\
 & x \\
 & xx \\
 & xxx \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & xxxxxxxxxxxxxxxxx\ldots
\end{array}
$$

Jedes Auftreten eines "x" entspricht dabei einem Element innerhalb der oben genannten Beispiele, wobei wir es in unserer realen Welt natürlich immer mit endlichen Folgen zu tun haben.

Reguläre Ausdrücke sind Bestandteile regulärer Sprachen, die wir oben als Chomsky - 3 - Sprachen kennengelernt haben.

Für uns ist dieser Formalismus und die Zuordnung zu den Sprachklassen nicht aus Ordnungsliebe wichtig, sondern für das Verständnis der syntaktischen Analysemechanismen bedeutsam. Erinnern wir uns nocheinmal der Darstellungshilfsmittel und abstrakten Modelle. Wir hatten zur Darstellung der Ableitungsstruktur von Sätzen den

- Syntaxbaum

sowie zur Erkennung (Akzeption) von Sätzen regulärer Sprachen den

- endlichen Automaten (FSA)

kennengelernt. (s. Abschnitt 2. 2. 1)

Wie sehen nun Syntaxbaum und endlicher Automat zur Ableitung bzw. Akzeptanz von iterativen Ausdrücken, d. h. von Ausdrücken, welche mittels der Hüllenoperation generiert sind, aus?

Für den Syntaxbaum können wir wählen zwischen dem Ableitungsbaum, welcher auch das Nichtterminalsymbol A enthält und dem *abstrakten Syntaxbaum* (engl. abstract syntax tree = ASD),

a) Syntaxbaum b) Abstrakter Syntaxbaum (AST)

<u>Abb. 3.21:</u> Syntaxbäume zur Darstellung von Iterationen

welcher anstelle der Nichtterminale die Operation enthält. Bevor wir diese speziellen Baumstrukturen für die Iteration so einfach hinnehmen, sollten wir sie nochmals mit den allgemeinen Ableitungsstrukturen regulärer Sprachen vergleichen.

Anstelle der Hüllenoperation

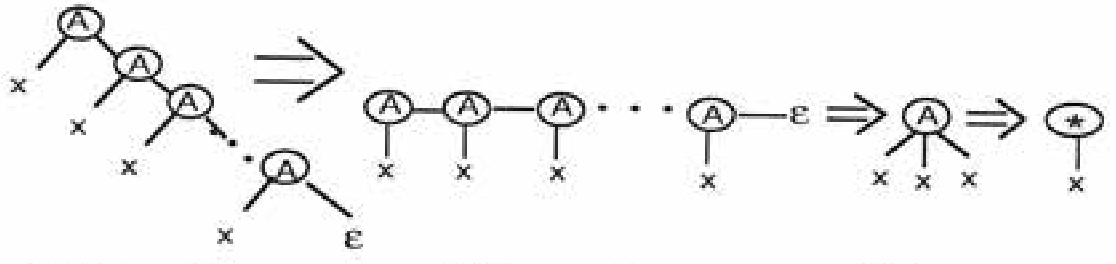
$$A \to x^*$$

hätten wir natürlich auch schreiben können

$$\begin{array}{lll} A \to x\,A & \text{(oder} & A \to x\,A \\ \to x & \text{auch} & \to +\,x \\ \to \varepsilon & & \to \varepsilon \end{array}$$

als Zeichen für arithmetische Ausdrücke)

welches folgende Ableitungsstruktur ergeben würde:



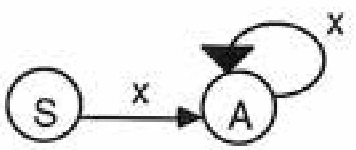
a) hierarchischer Baum b) lineare Liste c) Knoten d) Knoten

<u>Abb. 3.22:</u> Isomorphe Strukturbäume

Wir sehen in Abb. 3.22a) eine hierarchische Ableitungsstruktur (einen Binärbaum), bei der die linken Zweige mit den Terminalsymbolen besetzt sind. Diese hierarchische Struktur können wir durch "Flachlegen" in eine lineare Liste verwandeln (Abb. 3. 22b)), welche sich graphisch durch die vereinfachten Knoten c) und d) darstellen läßt.

Wesentlich hierbei ist, daß die hierarchische Struktur nach a) zwar theoretisch existiert, praktisch aber nicht erforderlich ist. Die Hierarchie existiert nämlich nur aus der Form, wie wir unsere Ableitungsregeln hingeschrieben haben, ist also künstlich verkompliziert worden. In der realen Welt sind wir intuitiv bemüht, jeweils die einfachste Gesetzmäßigkeit zu finden, sodaß wir hier einfach behaupten wollen, daß wir beim Hören einer musikalischen Iteration keine Hierarchie nach a) hören, sondern die "flache", nichthierarchische Struktur nach b).

Die Reduktion auf die einfachst mögliche Ableitungsstruktur haben wir natürlich nicht nur aus allgemeinen Erwägungen heraus vorgenommen, sondern insbesondere, um die adäquaten Analysemodelle anwenden zu können. Diese bestehen, wie wir bereits wissen, im Falle regulärer Sprachen aus endlichen, deterministischen Automaten. Wir hatten bereits einen solchen Automaten zur Erkennung beliebiger C - Dur - Dreiklänge konstruiert (s. Abb. 2.14), wobei dessen Struktur uns trotz seiner Mächtigkeit, alle möglichen Varianten des Dreiklanges zu erkennen, doch einigermaßen aufwendig erschien. Im Falle der einfachsten Iteration, dargestellt durch die Hüllenoperation x* besitzt jedoch auch ein solcher Automat einen sehr einfachen Zustandsübergangsgraphen (Abb. 3.23):



S : Startknoten (Zustand)

A : Analyseknoten (Zielknoten)

Abb. 3.25: Zustandsgraph für einen Automaten zur Akzeptanz von Iterationen

Diese Struktur ermöglicht für den Vorgang der syntaktischen Analyse unmittelbarer Iterationen durchaus eine anschauliche Interpretation:

Beim erstmaligen Auftreten des Elements x wird der Startzustand S verlassen und der Analysezustand A eingenommen. Beim Eintreffen weiterer Elemente x verbleibt der Hörer in diesem Zustand, ohne neue Analysezustände einnehmen zu müssen. Mit dem letzten x endet der Vorgang im Zustand A, welcher gleichzeitig Zielzustand ist. Damit ist die iterative Folge vom Typ x* akzeptiert.

Wie man leicht im Selbstexperiment nachvollziehen kann, wäre man in Zustand A ohne weiteres in der Lage, weitere Elemente x zu akzeptieren (oder sich vorzustellen), eben weil man die Gesetzmäßigkeit erkannt hat und die Analysestruktur erhalten bleibt.

Nachdem wir uns mit den verschiedenen realen und abstrakten Erscheinungsformen der Iteration vertraut gemacht haben, sind wir gerüstet, um uns jetzt mit der nächsten Grundstruktur, der Rekursion, genauer zu beschäftigen.

3. 5. 4 Rekursionen

3. 5. 4. 1 Allgemeine Erläuterung

Unter *Rekursion* versteht man die mehrmalige, geschachtelte Wiederholung gleicher oder ähnlicher Strukturen. Der Begriff Rekursion kommt von lat. "recurrere" = zurücklaufen und spricht den Vorgang des Hinein - und wieder Zurücklaufens an, der kennzeichnend für die Behandlung geschachtelter Strukturen ist.

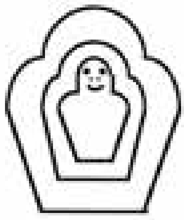
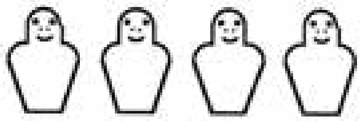
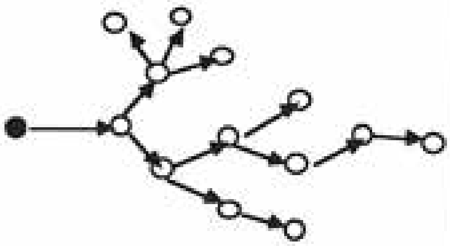
Wir kommen mit der Behandlung der Rekursion zu einem der wichtigsten Punkte unserer Betrachtungen, sozusagen zu einem Hauptpfeiler unseres Brückenschlags zwischen Musik und Informatik und man könnte sagen, die gesamten bisherigen Seiten dienten nur dem Zweck, die Grundlagen zu legen, um das Prinzip der Rekursion verstehen zu können. Auch wenn das ein wenig übertrieben wäre, so wird tatsächlich jetzt alles benötigt, womit wir uns bisher beschäftigt haben: Kontextfreie und kontextsensitive Grammatiken, Syntaxdiagramme, Strukturbäume und insbesondere Kellerautomaten.

Hinzu kommt etwas weiteres: Die klassische Musikwissenschaft kennt keine Rekursionen, sondern faßt alle, sich in irgendeiner Form wiederholenden Strukturen unter dem Begriff

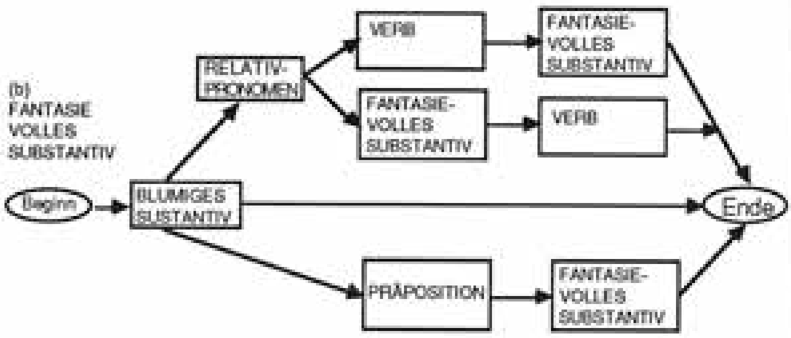
- Sequenz

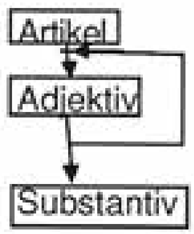
zusammen. Wir haben jedoch die Unterscheidung von Iteration und Rekursion eingeführt, welche in der Informatik fundamental ist. Könnte es sein, daß in der Musikanalyse bisher über einen zentralen Sachverhalt hinweggegangen wurde, welcher wesentlich zum richtigen Verständnis zahlreicher Werke ist? Könnte es sein, daß man vermeintlich wohlbekannte Abläufe überhaupt nicht oder falsch verstanden hat, daß man viele Strukturen unter einem ganz anderen Aspekt betrachten müßte und sich hieraus auch Rückwirkungen auf das Verständnis gesamter Werke ergäben? Kaum denkbar und doch möglich. Vielleicht denken wir aber auch nur in unterschiedlichen Begriffen, die in der Musik gar keine praktische Relevanz haben! Bevor wir jedoch weiter ins Spekulieren verfallen, wollen wir uns zunächst eingehender mit den Rekursionen beschäftigen.

Was sind nun Rekursionen? Am einfachsten veranschaulicht man das an Beispielen und zwar am besten wiederum im Vergleich zur Iteration, die wir nicht zuletzt deswegen ausführlich behandelt haben.

Beispiel für Rekursionen		verwandte Iterationen
- Schachtelung mit Gegenständen		
- Durchlaufen eines baumartigen Labyrinths		
- Bildung von Fibonacci-Folgen	0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...	1, 4, 9, 16, 25, ... n^2
- Bildung von Klammer-ausdrücken	((a + (a +) * a) * a + a)	a + a + a + ...
- Wiederholen von Operationen	$n! = n\,(n-1)!$	$n! = \prod_{i=0}^{n} n_i$
- Bildung von Palindromen	a b b a a b b a	a b a b a b a b

- Schachtelsätze [Hof 79]





(Quelle: Gödel, Escher, Bach : (s. 145))

Tab 3. 3 : Beispiele für rekursive Strukturen

Was ist denn nun das Gemeinsame an den zumeist ganz unterschiedlich erscheinenden Rekursionsbeispielen und was unterscheidet diese denn von den danebengestellten Iterationen? Fangen wir dazu einfach mit dem 1. Beispiel der russischen Puppen an. Anschaulich ist uns der Unterschied natürlich völlig klar:

- geschachtelte, russische Puppen stehen ineinander
- nicht geschachtelte russische (oder auch unechte russische) Puppen stehen nebeneinander.

Wie können wir das formal definieren? Versuchen wir , uns dies an den Eigenschaften einer Puppe klarzumachen: Jede Puppe besitzt die Eigenschaft, eine Puppe zu sein und darüberhinaus (bis auf die letzte) eine Puppe zu enthalten. Formal können wir dies durch eine Produktionsregel beschreiben, z. B. der folgenden Art:

R. 1 A -> p(A)
R.2 A -> p

wobei

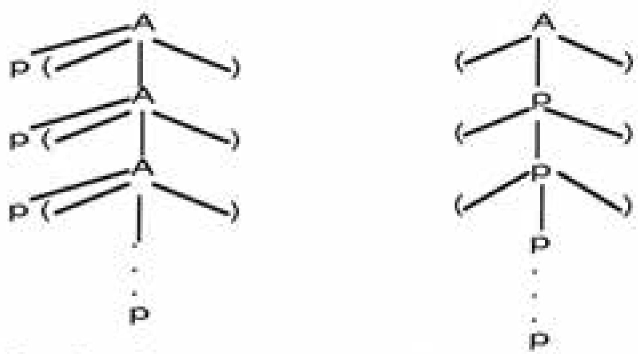
A allgemeine Struktur geschachtelter Puppen.
p die Puppe selbst
( ) die Eigenschaft, etwas zu enthalten.

Die erste Ableitungsregel definiert dabei das rekursive Konstruktionsprinzip der Puppen, die zweite das Ende der Rekursion.

Wenn wir mit der Ableitungsregel spielen, welches dem Schwenken oder Drehen der Puppen entspricht, erhalten wir Ausdrücke der folgenden Form:

A -> p (p (p (...)))

Versuchen wir, diesen Ausdruck in die Form unserer altbekannten Strukturbäume, bzw. abstrakter Syntaxbaüme zu bringen, so erhalten wir



a) Strukturbaum b) abstrakter Syntaxbaum

Abb. 3.26: Ableitungsstrukturen für russische Puppen

Wir haben also durch wiederholte Anwendung der rekursiven Ableitungsregel wunderschöne, regelmäßige Baumstrukturen erzeugt.

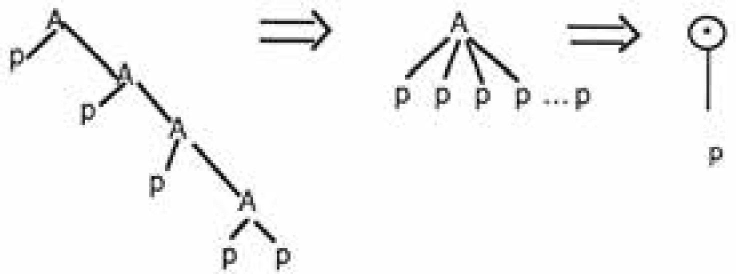
Bevor wir den Zusammenhang zwischen Rekursion und Baumstrukturen weiter verfolgen, wollen wir jedoch zunächst noch einmal die nichtgeschachtelten (unechten, russischen) Puppen ansehen. Welchem formalen Bildungsgesetz gehorchen diese? Versuchen wir, eine ähnliche Form wie für die echten russischen Puppen zu finden, so sollten wir schreiben:

I1. A -> p A
I2. A -> p

und daraus "schnitzen":

A -> p p p p ... = p*

Der zugehörige Baum besitzt dann folgende Struktur:



a) Baumstruktur b) Knoten c) Knoten

Abb. 3.27: Ableitungsstrukturen für unechte russische Puppen.

Wir stellen fest, daß wir, wie sollte es anders sein, die bereits bekannte, Darstellung iterativer Ausdrücke wie bei der allgemeinen Hüllenoperation x* erhalten.

Vergleichen wir die rekursive Baumstruktur von Abb. 3.26a) mit der iterativen von Abb. 3.27 a), so fällt uns als einziger und wesentlicher Unterschied auf:

- Die rekursive Struktur enthält Klammern.
- Die iterative Struktur enthält keine Klammern.

Haben wir damit den wesentlichen Unterschied zwischen iterativen und rekursiven Strukturen gefunden?

Klammern oder nicht Klammern?

Vorsicht! Aus der elementaren Mathematik sind uns Klammern wohl vertraut und wir haben dabei vermeintlich niemals an Rekursionen und Iterationen oder Baumstrukturen gedacht.

Betrachten wir folgende Beispiele:

(1)	$(a + b) * c$	$= a * c + b * c$
(2)	$(a + b) + c$	$= a + (b + c)$
(3)	$(a + (a + (a * b)))$	$= a + a + a * b$

Das erste Beispiel zeigt , wie wir einen Klammerausdruck ausmultiplizieren können, das zweite, wie wir Operanden unterschiedlich zusammenfassen können und das dritte schließlich, daß wir überflüssige Klammern weglassen können.

Hinter diesem leicht(fertigen) Umgang mit Klammern stehen jedoch die sehr gewichtigen, algebraischen Axiome für die

- Additionsoperationen : +, -
- Multiplikationsoperationen : * , |

in Gestalt der

- Assoziation
- Kommutation
- Distribution,

welche letzten Endes die Bindungsstärke der Operatoren, oder, anders Ausgedrückt, die Reihenfolge, in der Operationen auszuführen sind, festlegen. Unser leichtfertiger Umgang mit den Klammmern rührt nur daher, daß wir für manche Operationen (z. B. *, |) vereinbart haben, daß sie eine stärkere Bindung als andere (z. B. +, -) besitzen, sodaß wir die Klammern einfach weglassen können. Hätten wir diese Vereinbarung nicht getroffen, so müßten wir tatsächlich überall Klammern setzen, wo unterschiedliche Operatoren auftreten,

$$a + b * c + d = ((a + (b * c)) + d)$$

oder diese weglassen, wo wir gleiche Operatoren haben, oder es auf die Reihenfolge nicht ankommt (?)

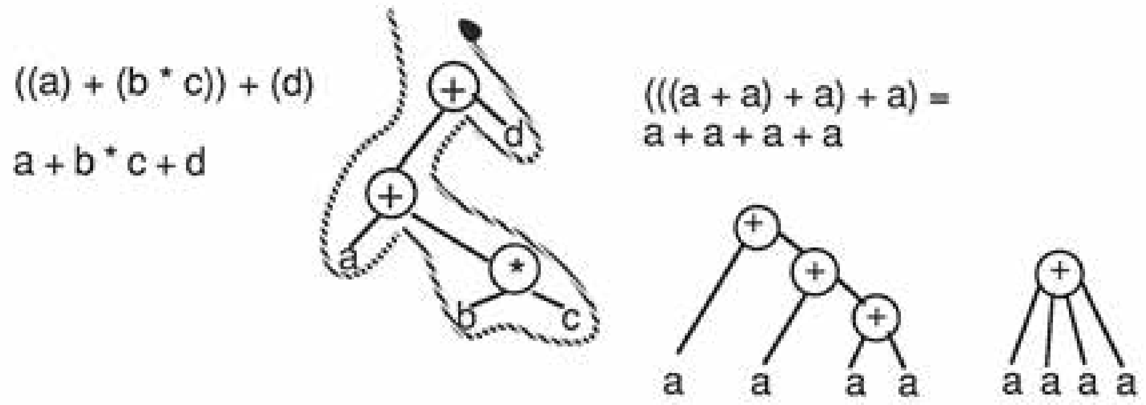
$$(a + (a + a) + a) = a + a + a + a$$

Was hat das nun mit Rekursion und Baumstruktur zu tun?

Ganz einfach! Ein vollständig mit Klammern "gespickter" Ausdruck wird so abgearbeitet und muß auch so abgearbeitet werden, daß zuerst die jeweils innersten Klammerausdrücke bearbeitet werden, bevor die sie enthaltenden Ausdrücke bearbeitet werden können. Dieses allgemeine Prinzip bezeichnen wir auch als

" von innen nach außen " - Regel.

Wie sieht das nun im Strukturbaum aus? Nehmen wir den vorletzten Ausdruck her, so erhalten wir als abstrakten Syntaxbaum (s. Abb. 3. 28 a))

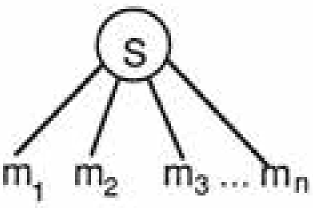


a) echter Klammerausdruck b) unechter Klammerausdruck

Abb. 3.28: Abstrakter Syntaxbaum für geklammerte und nicht geklammerte Ausdrücke.

Zur Ableitung des echten Klammerausdrucks a) müssen wir tatsächlich eine echte Baumstruktur durchlaufen, (wobei es unterschiedliche Durchlaufrichtungen und Baumanordnungen geben kann), während wir bei der Abbarbeitung der unechten Klammerausdrücke b) zwar auch einen (unechten) Strukturbaum angeben können, diesen aber auf eine flache Struktur mit nur einem Knoten reduzieren können. Diese einfache Struktur

besagt wiederum nichts anderes, als daß nicht definiert und damit gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge und mit wievielen Operanden gleichzeitig die " + " - Operation ausgeführt wird. Es mag andere Operatoren geben, bei denen die Reihenfolge nicht beliebig ist, sondern wo die "Blätter", die an den Knoten hängen, geordnent sind und nicht in ihrer Reihenfolge verändert werden dürfen. Als Beispiel hierfür möge eine geordnete Folge unechter, russischer Puppen dienen, oder, um endlich mal wieder ein Beispiel aus der Musik zu haben, eine Sequenz, z. B . wie im C - Dur - Konzert von Beethoven, wo es davon wimmelt.



Doch wieder zurück zu den Rekursionen: Was hatten wir bisher herausgefunden, oder hypothetisch angenommen?

- Rekursionen haben etwas mit Baumstrukturen zu tun.
- Rekursive Strukturen enthalten "kleinere, vollständige Exemplare ihrer selbst"
- Rekursionen müssen in der realen Welt enden.
- Rekursive Strukturen lassen sich formal durch rekursive Ableitungen angeben.
- Rekursive Ausdrücke benötigen Klammern.
- Iterative Ausdrücke benötigen keine Klammern.
- Klammerausdrücke müssen von innen nach außen abgearbeitet werden.
- Das Abarbeiten eines rekursiven Ausdrucks läßt sich als Durchlaufen einer Baumstruktur veranschaulichen.

Bisher paßt das ganze ganz gut zusammen und wir haben verschiedene, uns bisher bekannte Aspekte auf Verträglichkeit und Plausibilität überprüft und keinen offenkundigen Widerspruch in unseren Hypothesen gefunden. Trotzdem sollten wir erst Ruhe geben und weiter fortfahren, wenn wir wirklich meinen, alles verstanden zu haben, insbesondere natürlich im Hinblick auf die beabsichtigte Anwendbarkeit auf die Musik. Stellen wir nocheinmal wichtige Begriffe samt der entsprechenden Ausprägungen einander gegenüber:

Begriffe	Beispiele	
	Spiele, Mathematik	Musik
Iteration	unechte, russische Puppen a + a + a	Sequenz
Rekursion	echte, russische Puppen a + a	?
Operanden	Puppen a	Motiv
Operation	Nebeneinanderstellen +	Aneinanderreihen
Klammern (z)	Enthalten ( )	?

Tab. 3.4: Zusammenstellung wichtiger Begriffe mit Beispielen

Beim Aufstellen von Tab. 3.4 müssen wir, wenn wir ehrlich mit uns sind, noch einige dicke Fragezeichen eintragen, zunächst natürlich in dem Feld für Rekursionen in der Musik, denn wir haben bisher noch keine zu Gesicht bekommen. Zum zweiten aber auch beim Klammerbegriff, und dabei natürlich wieder in der Musik, denn wir haben bisher ebensowenig musikalische Klammern wie musikalische Rekursionen gesehen. Wie sieht es denn außerhalb der Mathematik überhaupt mit Klammern aus, was sind Klammern bei russischen Puppen, im Labyrinth, in der natürlichen Sprache und überhaupt ganz allgemein?

Nehmen wir uns zur Klärung wieder die russischen Puppen zur Hand, mit denen wir alles begonnen hatten.

Klammern bedeutete bei den russischen Puppen die Fähigkeit, die nächstkleinere Puppe enthalten zu können: Die größte Puppe "besaß" die äußersten Klammern, die zweitkleinste die innersten Klammern und die kleinste Puppe gar keine Klammern, denn diese Puppe enthält keine andere Puppe mehr.

Wenn wir diese Eigenschaften

- Enthalten können
- Enthalten sein

verallgemeinern und noch mit einer Rangfolge versehen, wie

- Übergeordnet sein
- Untergeordnet sein,

so stellen wir fest, daß Klammern die abstrakte mathematische Form eines

Hierarchiebildners

darstellt: Die äußere Klammer, in lexikalischer Schreibweise die linke Klammer "(" definiert die oberste Hierarchiestufe, jede weitere "(" definiert die nächste, darüberliegende. Jede rechte Klammer ")" schließt eine solche Stufe ab, wobei bei korrekter Struktur insgesamt gelten muß, daßdie Summe aller linken und rechten Klammern gleich ist und auf jeder Hierarchiestufe i innerhalb einer Struktur j zu jeder linken Klammer eindeutig eine rechte existiert.

Der gerade eingeführte Begriff "Hierarchiebildner" mag für manche jungen Leute ein Reizwort und emotional vorbesetzter als die neutrale"Klammer" sein. Diese Leser seien zum Trost an die "von innen nach außen" - Regel erinnert, welche besagt, daß alle Rekursionen zunächst einmal bis zu den untersten, oder besser innersten Hierarchiestufen vorlaufen, also an die Basis, bevor die über geordneten, oder besser äußeren Hierarchiestufen abgeschlossen werden können.

Benützen wir nochmals die russischen Puppen:

Wir müssen beim Zusammensetzen mit der innersten Puppe beginnen (sonst bekommen wir sie nachträglich nie mehr hinein), aber wir müssen auch vorher eine Ordnung herstellen (sonst verändern wir möglicherweise die Reihenfolge).

Die Rekursion läuft unter Ausführung bestimmter Operationen (z. B. Ineinanderstecken entsprechend der Reihenfolge wieder nach außen.

Demgegenüber benötigt die Iteration minimal einen Durchlauf, um die Puppen in einer Folge anzuordnen. Sie muß nicht mehr zum Ausgangspunkt oder früheren Zwischenknoten zurückkehren, wie es die Rekursion tut, um das gewünschte Ziel zu erreichen. Sie kann daher getrost alle Information über den vorangegangenen Verlauf vergessen, dessen Ergebnis in Gestalt der beliebig fortführbaren Aneinanderreihung der Puppen besteht.

Nachdem wir uns so ausgiebig mit den echten und unechten russischen Puppen beschäftigt haben und meinen, hierbei ein Grundverständnis von Rekursion und Iteration gewonnen zu haben, wollen wir versuchen, dies auf die anderen Beispiele in Tab. 3.3 anzuwenden.

Das dort als nächstes aufgeführte Problem der Wegsuche im Labyrinth ist mit 2500 Jahren eines der ältesten Probleme der Informatik überhaupt und gleichzeitig die allgemeine Veranschaulichung der Rekursion. Während es bei den geschachtelten Puppen nur einen Weg gibt, zur Lösung zu kommen, gibt es bei der Labyrinthsuche viele Wege, darunter auch möglicherweise Irrwege, die nach erfolgloser Suche wieder verlassen und nicht wieder betreten werden sollten. Genau genommen gibt es nicht nur ein, sondern eine ganze Anzahl von Labyrinthproblemen, je nachdem, ob man es mit offenen, geschlossenen, zyklischen oder azyklischen Labyrinthen zu tun hat. In allen Fällen ist jedoch die Lösung ähnlich, ebenfalls 2500 Jahre alt und geht zurück auf Theseus, welcher im Labyrinth von Kreta den schrecklichen Minotaurus finden und besiegen sollte. Damit er nach vollbrachter Tat wieder zum Ausgangspunkt zurückfinde, gab ihm Ariadne, seine Geliebte, einen Faden mit, welcher am Eingang festgemacht war und bei der Suche hinter ihm ablief. Wann immer er das Ende einer Sackgasse erreicht hatte, ging er zurück und verdoppelte den Faden. Wann immer er in Vorwärtsrichtung auf einen bereits liegenden Faden (oder deren zwei) stieß, kehrte er um wie am Ende einer Sackgasse, denn sonst wäre er im Kreise gelaufen. Auf diese Weise läßt sich jedes Labyrinth absuchen, vorausgesetzt, der Faden reicht!

Der Ausgang der Geschichte ist bekannt: Theseus fand den Minotaurus, besiegte ihn, fand glücklich zum Ausgang zurück und zu der klugen Ariadne, die schon vor 2500 Jahren ein wichtiges Informatikproblen zu lösen verstand.

Denn das Ableiten eines arithmetischen Ausdrucks wie in Abb. 3.28 wo die gestrichelte Linie übrigens den Ariadnefaden darstellt), der Aufbau oder die Ableitung eines Syntaxbaumes gehören zu der gleichen Problemklasse. Und der Ariadnefaden läßt sich tatsächlich auch formal ebenso wie in der modernen Implementierung auf einem Computer identifizieren.

Erinnern wir uns unserer Erkenntnisse über Rekursivität von oben:

- Rekursive Strukturen enthalten "kleinere vollständige Exemplare ihrer selbst":

  Jedes Labyrinth besteht aus kleineren Labyrinthen.

- Rekursionen müssen in der realen Welt enden:

  Jedes reale Labyrinth ist endlich.

- Rekursionen haben etwas mit Baumstrukturen zu tun:

  Jedes Labyrinth läßt sich in einen Baum transformieren, vorausgesetzt, daß zyklische Strukturen aufgelöst werden, was jedoch leicht möglich ist. (s. unten)

- Rekursive Strukturen lassen sich formal durch rekursive Ableitungen angeben:

  Beim Labyrinth könnte dies so aussehen:

  L -> LABYRINTH (L , Knoten, L)

  wobei wir willkürlich ein *bifurkales* Labyrinth (d. h. mit jeweils zwei Abzweigungen pro Knoten) angenommen haben.

- Rekursive Ausdrücke benötigen Klammern:
  Im Labyrinth, dessen Zyklen ggfs. eliminiert sind, haben wir als Hierarchiebildner die Abzweigungen, die immer tiefer hineinführen.

- Iterative Ausdrücke benötigen Klammern:
  Ein Labyrinth ohne Abzweigungen stellt einen linearen Weg dar, entweder zum gegenseitigen Ausgang, oder in Form einer Sackgasse.

- Klammerausdrücke müssen von innen nach außen abgearbeitet werden:

  Im Labyrinth bedeutet dies, daß alle Wege bis zu ihrem Ende durchlaufen werden müssen, bis sie insgesamt als durchsucht gelten können.

- Das Abarbeiten eines rekursiven Ausdrucks läßt sich als Durchlaufen einer Baumstruktur veranschaulichen:

  Da das zyklenfrei gemachte Labyrinth sich direkt durch eine Baumstruktur abbilden läßt, gilt diese Aussage direkt: jedes Labyrinth läßt sich nur rekursiv vollständig durchlaufen.

Wir sehen, daß insgesamt bis auf die Zyklenbehandlung keine neuen Aspekte aufgekommen sind. Nachdem wir aber den Zyklus als eigene Grundstruktur eingeführt haben, wollen wir an dieser Stelle die Zyklenbehandlung nicht weiter vertiefen, sondern weitergehen in Tab. 3.3, um unser Rekursionsverständnis an den restlichen Beispielen zu verifizieren.

Die Fibonacci - Zahlen, die einige wundersame Eigenschaften aufweisen, gehen zurück auf den italienischen Mathematiker Bonacci, den "filius bonaccii" , der das Problem der Vermehrung einer Hasenfamilie lösen wollte: Ein Hasenpaar bekommt jedes Jahr 2 Junge, die ein Jahr brauchen, bis sie selbst wieder Junge bekommen. Alle Hasen sollen beliebig lange leben und sich vermehren können. Wieviele Hasen gibt es nach n Jahren? Fibonacci fand hierfür folgende rekursive Lösung:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad\qquad n \geq 0$$

mit

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$

Wenn man dieses z. B. für n = 5 aufschreibt, erhält man:

$$\begin{aligned} F_5 = F_4 + F_3 & \\ &= (F_3 + F_2) + (F_2 + F_1) \\ &= (((F_2 + F_1) + (F_1 + F_0)) + (F_1 + F_0) + F_1) \\ &= (((F_1 + F_0) + F_1) + (F_1 + F_0)) + ((F_1 + F_0) + F_1) \\ &= 5 \end{aligned}$$

Wenn man die Struktur rekursiv auflöst, erhält man folgende, wunderschöne Baumstruktur:

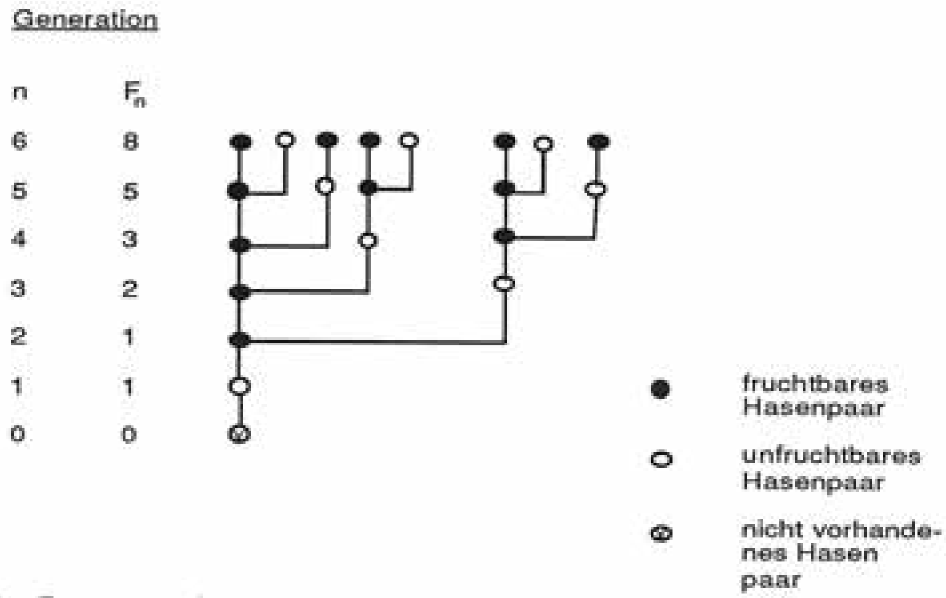


Abb. 3.29: Baumstruktur für die Fibonacci - Zahl F_5

Die Rekursion bedeutet hierbei anschaulich: Wenn ich wissen will, wieviele Hasen es in der 5. Generation gibt, muß ich den Stammbaum der ganzen Hasenfamilie konstruieren.

Fibonacci bestätigt unsere Modellvorstellung eines Zusammenhangs zwischen Rekursion und Baumstruktur und liefert über die Vermehrungsdynamik der Hasen hinaus zunächst keine neuen Erkenntnisse. Interessant ist vielleicht in unserem Zusammenhang noch folgende Eigenschaft:

$$\Phi^{n-2} \leq Fn \leq \Phi^{n-1}$$

mit

$$\Phi = (1+\sqrt{5})/2$$

ein Zahlenverhältnis, welches auch als

" goldener Schnitt"

bekannt ist und in der bildenden Kunst eine wichtige, mit unserem ästhetischen Empfinden in besonderem Einklang stehende Proportion ist.

Das nächste Beispiel in Tabelle 3.3 behandelt die Bildung von Klammerausdrücken. Nachdem wir die Klammern als Hierarchiebildner "entlarvt" haben, fällt es uns nicht schwer, zu jedem Klammerausdruck den zugehörigen Strukturbaum anzugeben. (s. Abb. 3. 30)

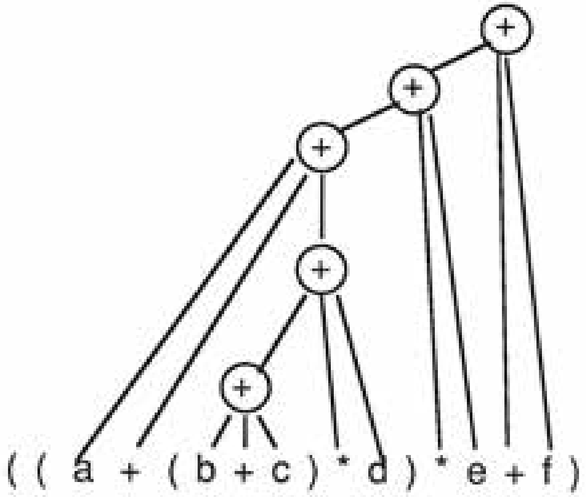


Abb. 3.30: Strukturbaum für Klammerausdruck

Interessant ist jetzt, daß man die Klammern zur eindeutigen Beschreibung einer Abarbeitungsreihenfolge, wie sie durch die Hierarchiebeziehung festgelegt ist, gar nicht benötigt. Vielmehr kann man auf alle Klammern verzichten und erhält trotzdem alle Struktur - und damit auch Reihenfolgeinformationen. Für unser Beispiel von Abb.3.30 hätte dies folgendes Aussehen:

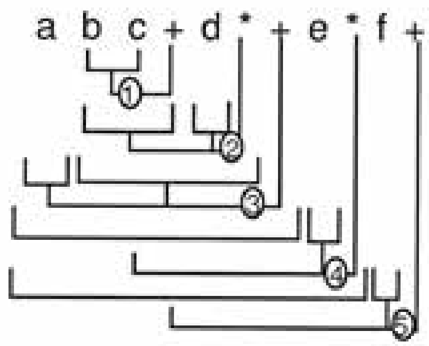


Abb. 3.31: Polnische Notation für arithmetischen Ausdruck.

Die Ableitung des Ausdrucks ist durch die numerierten Klammerausdrücke dargestellt, die in dieser Reihenfolge abgearbeitet werden: Es werden zuerst die Operationen b und c, entsprechend den nachfolgenden + - Operationen addiert, deren Summe mit d multipliziert u.s.f.

Wegen der Nachstellung der Operatoren hinter den ihnen zugeordneten Operanden wird diese Schreibweise auch in Erinnerung an den Erfinder, den polnischen Mathematiker *LUKASIEWICZ* als

Polnische Postfix - Notation

bezeichnet. Diese Notation mag für den Nichtinformatiker etwas sonderbar erscheinen, jedoch sind die Rechenregeln sehr einfach, wenn man sich eines Hilfsmittels bedient, das wir bereits in anderem Zusammenhang kennengelernt haben, des Kellers.

Ausdrücke in polnischer Notation lassen sich unmittelbar auf einen Keller ausführen, wenn man folgende Regeln einhält:

1. Arbeite den Ausdruck von links nach rechts ab.

2. Wenn Du einen Operanden antriffst, lege ihn auf dem Keller ab (PUSH).

3. Wenn Du einen Operator (n - stellig) antriffst, nimm und verknüpfe die obersten (n) Operanden auf dem Keller und lege das Ergebnis als neue Operanden auf dem Keller ab. (z. B. + , * , POP).

4. Verfahre so, bis das letzte Element (das "rechteste") erreicht ist. Dann liegt das Ergebnis oben auf dem Keller.

Abb. 3.32 veranschaulicht die Abarbeitungsfolge auf dem Keller:

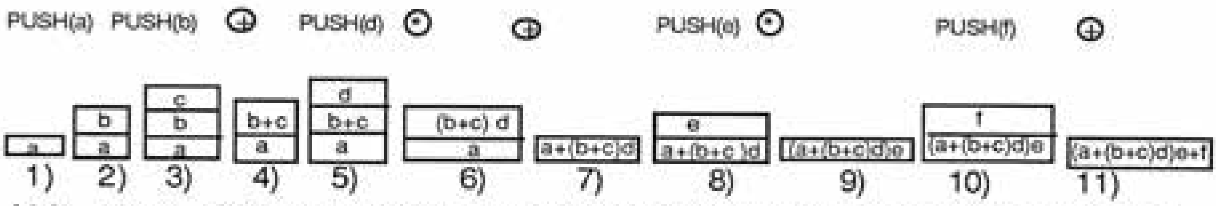


Abb. 3.32: Abarbeitung des arithmetischen Ausdrucks auf dem Keller

Mit dem Keller zusammen ist die Abarbeitung, wie man sieht, ganz einfach und mit etwas Übung wird man schnell mit der polnischen Postfix-Notation vertraut und bekommt vielleicht sogar bald Spaß daran, weil sich so einfach damit rechnen läßt.

Manch einer wird sich jetzt vielleicht trotzdem fragen, warum wir immer tiefer in die Informatik - Spezialitäten eindringen und uns scheinbar immer weniger mit musikalischen Fragestellungen beschäftigen. Das Wörtchen "scheinbar" signalisiert, daß diese Sorge unbegründet ist: Zum einen wollen wir unser Verständnis von Rekursion festigen und sind auch bei diesem Beispiel wieder, wie dürfte es anders sein, bei Baumstrukturen und beim Keller gelandet, haben insoweit unsere bisherigen Vorstellungen bestätigt.

Zum zweiten haben wir aber hinzugelernt, daß man auf diese für die Rekursion bisher wichtigen Klammern bei geeigneter Reihenfolge vollständig verzichten kann und daß die Abarbeitung auf dem Keller plötzlich ganz einfach wird. Wenn wir uns jetzt überlegen, daß es in der Musik ja auch keine Klammer gibt (?), und wir als Hörer nicht die Möglichkeit haben, Verknüpfungen in anderer als der zeitlichen Reihenfoge, d. h. auch von links nach rechts, vorzunehmen, dann sehen wir unmittelbar den Bezug. Unsere Modellvorstellung eines Kellers, den wir zur dynamischen Strukturanalyse des Kellers offenbar benötigen, erhärtet sich nicht nur immer mehr, sondern wird auch immer konkreter. Bevor wir jedoch zu den musikalischen Beispielen übergehen, wollen wir zunächst noch unsere Tab. 3.3 vollständig abarbeiten. Eine Struktur, die nur rekursiv definierbar ist, ist die der *Palindrome*. Palindrome sind symmetrische Symbolfolgen mit einer Achse in der Mitte als Spiegellinie. Beispiele für Palindrome sind:

Reger
Ein Neger mit Gazelle zagt im Regen nie.
01100110

Die Ableitungsregeln lauten im einfachsten Fall:

1. Z -> a Z a
2. -> b Z b
3. -> ε

Dem mit Strukturbäumen mittlerweile vertrauten Leser wird es eine leichte Übung sein , einen solchen z. B. den oben angegebenen 0/1 - Palindrom zu konstruieren. Deswegen wollen wir dies hier auch einmal auslassen.

Wie sieht es dagegen mit dem Abarbeiten auf dem Keller aus? Das Berechnen eines arithmetischen Ausdruckes in polnischer Postfix-Notation auf dem Keller haben wir gerade(so) verstanden, und könnten ihn natürlich auch nochmal angeben und damit unsere Kellerrechnung kontrollieren.

Bei den Palindromen sind wir aber zunächst ziemlich hilflos: Wir finden keine Operatoren und sehen eigentlich auch erst bei genauem Vergleich, welche Zeichen zusammengehören, und wo die Symmetrieachse liegt, können wir erst am Schluß, d. h. nach Betrachtung des gesamten Ausdrucks, feststellen.

Damit wir die Unsicherheit vermeiden, gehen wir vorsichtshalber nochmal einen Schritt zurück und überlegen, welche Beziehungen zwischen den Symbolen bestehen. Betrachten wir die Ableitungsregeln 1 und 3

1. Z -> a Z a
2. Z -> b Z b

so könnte man unter Hinzufügen von Klammern uns einem Partnerschaftsoperators ⚭ ohne weiteres so schreiben:

1/2. P -> a ⚭ (R) a
3/4. R -> b ⚭ (P) b

Für das obige Beispiel würde dies ergeben:

a⚭ (b⚭ (b⚭ (a⚭ a) b) b) a)

oder in polnischer Notation

a	b	b	a	a	⚭	b	⚭	b	⚭	a	⚭
1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)	11)	12)

Betrachtet man die Abarbeitung auf dem Keller, so erhält man folgende Kellerzustände (Abb. 3.33).

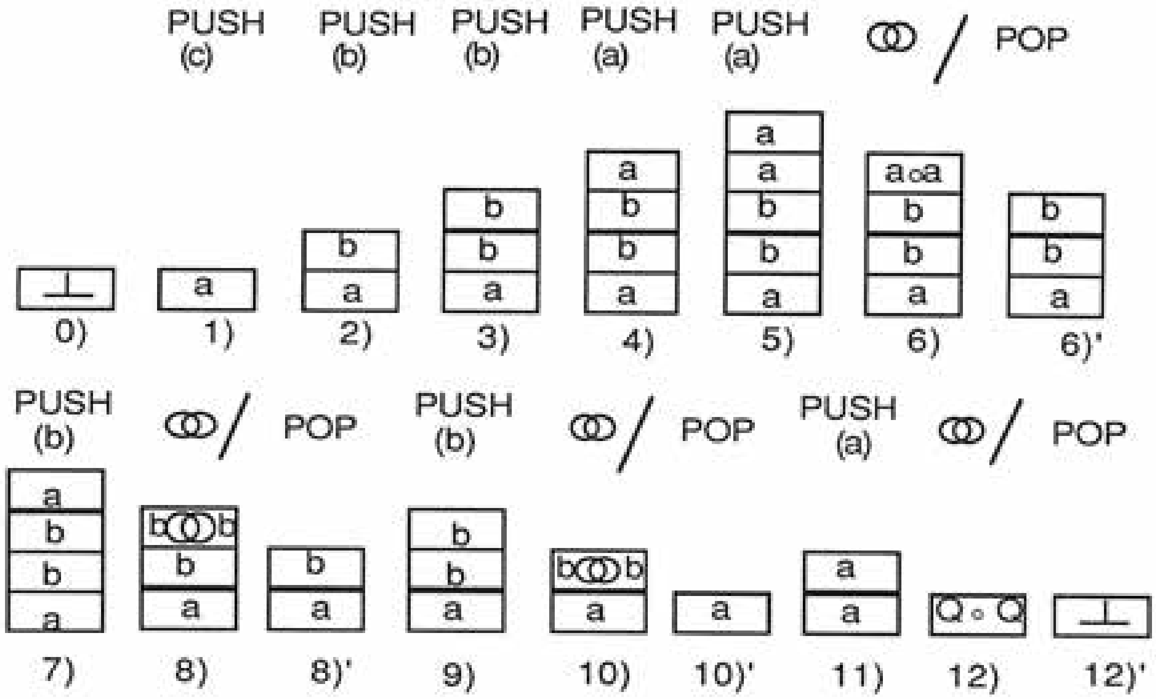


Abb. 3.33 : Bearbeitung des Palindroms aus Tab. 3. 1 auf einen Keller

Wenn man die Abarbeitung einzeln nachvollzieht , so stellt man fest, daß die ersten 4 Elemente des Palindroms schrittweise auf den Keller gestapelt werden und zwar bis zur Mitte, d. h. bis zur Symmetrieachse. (Schritt 4)). Es folgt ein weiteres Element (Schritt 5)), jedoch stellt dieses bereits den Partneroperanden für die Verknüpfungsoperationen dar und leitet damit bereits die Umkehr und den Kellerabbau ein. Wir wollten unseren Partneroperanden so verstanden haben, daß dieser wirtklich nur die zusammengehörigen Symbole vereinigt und diese dann gemeinsam "dahinscheiden", ohne weitere Spuren auf dem Keller zu hinterlassen. Aus diesem Grund wurden die Verknüpfung in 2 Teilschritten dargestellt, der eigentlichen Verschmelzung und dem Löschen (POP). Das ganze läuft so weiter, bis die Eingangssymbolfolge abgearbeitet und der Keller wieder auf den Ausgangszustand (⊥) zurück abgebaut ist. Für jedes Symbol wurde zum Glück ein Partner gefunden und alles hat sich zum Schluß in Wohlgefallen aufgelöst.

Doch bevor wir das Beispiel zufrieden abschließen und fortfahren, sollten wir uns den ursprünglichen Ausdruck

a b b a a b b a

nochmals mißtrauisch ansehen und uns fragen, ob wir nicht bei der ganzen Kellerbearbeitung mittels des künstlich eingeführten Verknüpfungs - Operators einen Taschenspieler - Trick angewendet haben.

Woher wissen wir denn eigentlich, wenn wir keine weitere Vorinformation haben, daß nicht bereits die beiden ersten "b" zusammengehören, sondern diese ihre Partner erst gegen Ende finden? Diese Frage ist mehr als berechtigt! Wir hatten diese Frage, wenn wir uns erinnern, schon sehr viel früher bei der Behandlung deterministischer und indeterministischer Ableitungen diskutiert und tatsächlich haben wir hier ein typisches indeterministisches Problem vorliegen. Das heißt, wir würden in der Tat dann folgende Verschmelzungen vornehmen (Fall a)):

a b b a a b b a

a) falsche Zuordnung

b) richtige Zuordnung

Abb. 3.34: mögliche Zuordnungen bei Palindrom - Beispiel

Wir hätten jedoch bereits nach dem 4. Symbol den Keller geleert und damit eine Endebedingung erreicht, bevor die Eingangsliste zu Ende gelesen ist. (Fall a))Wir würden als Ergebnis 2 Palindrome feststellen und nicht eines, wonach gefragt war, und damit feststellen, daß wir einen Fehler gemacht haben oder das Palindrom keines ist. Wir müßten unsere Entscheidung revidieren und gelangten dann zu dem korrekten Ergebnis (Fall b)). Diese nachträgliche Korrektur liegt in der Nähe der indeterministischen Verfahren.

Was hat das Ganze eigentlich wieder mit Musik zu tun, wird sich der ungeduldige Leser abermals fragen? Sehr viel natürlich, wie man in Kürze feststellen wird. Zum einen weist unser Beispiel eine Eigenschaft auf, welche für die Musik typisch ist:

es gibt keine expliziten Operatoren,

sondern Beziehungen in der Reihenfolge der Elemente. Wie diese Beziehungen mit musikalischen Mitteln so ausgedrückt werden, daß sie der Hörer trotz seiner indeterministischen Analysefähigkeiten zweifelsfrei erkennen kann, wird ein wichtiger Punkt weiter unten sein.

Zum zweiten wird unser erstes musikalisches Rekursionsbeispiel tatsächlich eine Palindromstruktur aufweisen, sodaß wir alle unsere diesbezüglichen Überlegungen unmittelbar anwenden können. Nachdem wir mit jedem weiteren Beispiel von Tab. 3. 3 einerseits unsere Hypothesen bezüglich des Zusammenhangs zwischen Rekursion, Baumstrukturen und Kellerabarbeitung bestätigt fanden, andererseits doch immer noch neue Aspekte hinzugewonnen haben, sehen wir nun die noch verbleibenden Beispiele an.

Die Fakuktätsfunktion, Mutter und Vater zugleich der Binominalkoeffizienten, ist wohl das meistzitierte Beispiel für eine rekursive Darstellung einer Funktion

$$n! = n\,(n-1)\,! \qquad \text{mit}$$
$$0! = 1$$

deren Korrektheit mittels vollständiger Induktion bewiesen wird. Wenn wir nun jetzt wieder zur Erinnerung fragen, ob wir es bei der Berechnung von n! mit einer typischen rekursiven oder einer typischen iterativen Aufgabenstellung zu tun haben, so sollten wir nochmals beide Varianten hinschreiben und vergleichen.

rekursiv	iterativ
$n! = n\,(n-1)\,!$	$n! = \prod_{i=1}^{n} i$
mit	
$0! = 1$	

Im iterativen Fall schreiben, bzw. rechnen wir

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n,$$

im rekursiven Fall dagegen

$$n! = (\,n * ((n-1) * ((n-2) * \ldots * 1\,)))$$

und erhalten in beiden Fällen identische Ausdrücke, jedoch in umgekehrter Reihenfolge, einmal mit, einmal ohne Klammern. Wenn wir uns an die Regeln der Klammerausdrücke ("von innen nach außen") erinnern, so stellen wir fest, daß wir den iterativen Ausdruck direkt von hinten beginnend ausrechnen können (wobei die Reihenfolge genausogut umgekehrt sein könnte.), während wir beim rekursiven Ausdruck mit den am weitesten rechts stehenden, innersten Klammerausdruck beginnen müssen und uns dann nach links vorarbeiten. Wir würden erst einmal alle Operanden auf den Keller bringen, (n unten, 1 oben) und dann alle Multiplikationen nacheinander ausführen. In polnischer Postfix - Notation erhalten wir folgenden Ausdruck

$$n \;\; n-1 \;\; n-2 \;\; n-3 \;\ldots\; 3 \;2 \;1 \;* * * * \ldots * * *$$

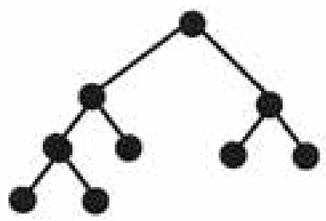
Es wäre, wie bei den eingangs beschriebenen russischen Puppen, bei denen wir auch, wie es sich bei Rekursionen gehört, zwei Vorgänge unterscheiden:

- Zuerst werden alle Elemente sortiert aufgestellt, (Hineinlaufen)

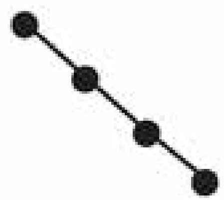
- dann werden alle Elemente in dieser Reihenfolge rückwärts bearbeitet. (Herauslaufen)

Da wir dasselbe Problem auch sehr viel einfacher iterativ lösen können, stellt sich die Frage, ob wir dies nicht auch bei der Rekursion erkennen können. Die Antwort lautet: Ja! Wenn wir nämlich die für jede Rekursion typischen Baumstruktur konstruieren, so stellen wir fest, daß wir es mit einem sehr speziellen Baum zu tun haben, der genau wieder so aussieht, wie die in Abb. 3. dargestellte Struktur. Wie bereits oben gezeigt, läßt sich diese einfach in eine lineare Liste transformieren und mittels des Hüllenoperators sogar noch weiter vereinfachen, sodaß diese Rekursion auf die Iteration zurückzuführen ist.

Vergleicht man nochmal die allgemeine Baumstruktur mit einer linearen Liste (Abb. 3.35),



a) Baumstruktur



b) lineare Liste

Abb. 3.35: Zum Vergleich von Rekursion und Iteration

so stellt man fest, daß lineare Strukturen Spezialfälle von Baumstrukturen darstellen. Dies bedeutet umgekehrt, daß sich jede Iteration auch in eine Rekursion transformieren läßt, aber nicht umgekehrt. Die Rekursion ist also der mächtigere Mechanismus.

Kommen wir zu dem letzten Beispiel, der rekursiven Konstruktion der Syntax (s.Tab. 3.3). Typische Beispiele stellen Schachtelsätze dar, meist in Gestalt von Relativsätzen, an denen insbesondere die deutsche Sprache so reich ist.

"Der Hund, der den Briefträger, der die Post austrug, biß, war böse:"

Beim Lesen merkt man förmlich, wie sich der Analysekeller aufbaut und, wenn man z. B. bei dem Wort "Post" anhält, stehenbleibt und nicht mehr abgebaut werden kann. Jeder, der schon einmal mit einem ausländischen Simultandolmetscher gearbeitet hat, welcher aus dem Deutschen in irgendeine Fremdsprache zu übersetzen hatte, weiß, welche Schwierigkeiten bei Schachtelsätzen infolge der sich bildenden großen Kellerinhalte entstehen. Umgekehrt sind die Deutschen aufgrund ihrer Muttersprache fast dazu geboren, rekursive Prozesse mühelos in ihrem Kopf ablaufen zu lassen, sodaß der gesamte, bisher behandelte Stoff über Rekursionen den meisten Lesern eigentlich auf den Leib geschrieben sein müsste.

Sehen wir uns nochmals die syntaktischen Ableitungsregeln an. Wir haben diese bereits weiter oben als Syntaxgraphen oder speziell im Hinblick auf ihre rekursiven Möglichkeiten als *Rekursive Transitionsnetze* bezeichnet [Wino 83]. Abb. 3.36 zeigt ein solches Netz mit einer rekursiven Ersetzung, welche [Hof 79] entnommen ist.

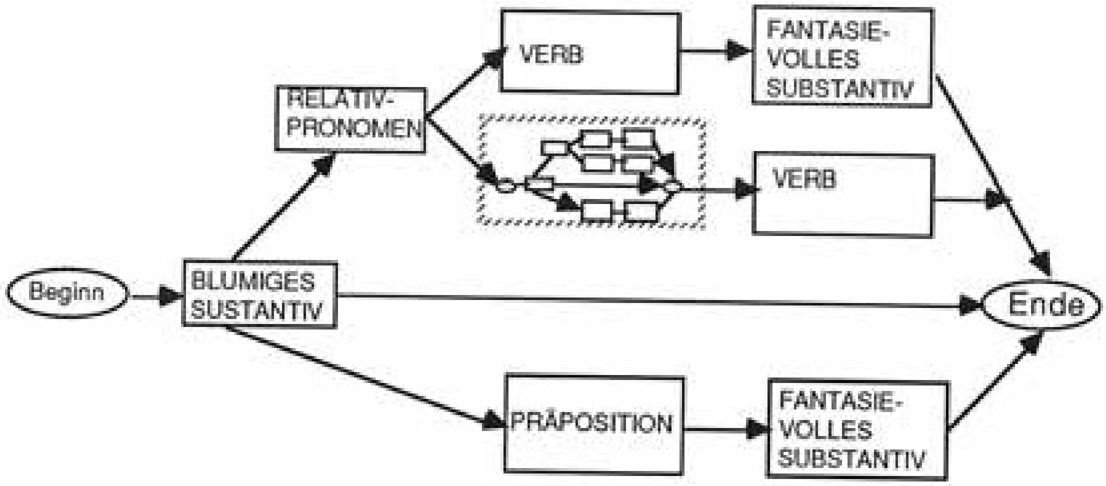


Abb. 3. 36: Rekursives Transitionsnetz im Deutschen [Hof79]

Fragen wir, bevor wir die RTNs verlassen, nocheinmal nach Besonderheiten:

- Klammern: Die der Klammerung entsprechende Schachtelung von Sätzen zu erkennen, macht uns aufgrund unserer Kenntnis der deutschen Syntax i. a. keinerlei Schwierigkeiten.

- Abgrenzung zu Iteration: Die sprachliche Iteration stellt sich dar als reine Aneinanderreihung gleichartiger Begriffe, z.B. in Form einer Aufzeichnung von Gegenständen (Substantiven), Eigenschaften, (Attributen), Tätigkeiten (Verben), etc.
  Diese syntaktisch zu analysieren, bedarf es keiner Rekursion.

- Baumstrukturen und Rekursionen: Auch ohne rekursive Ableitungen in Form von Schachtelungen entstehen Syntaxbäume , wie wir sie schon ganz am Anfang angegeben haben. Diese zu analysieren, bedarf es rekursiver Algorithmen, auch wenn die Baumstrukturen nicht rekursiv sind.

Diese letzte Bemerkung ist unter didaktischen Gesichtspunkten schon fast als hinterhältig zu bezeichnen! Auf ca. 25 Seiten wurde ein Verständnis über Rekursivität aufgebaut, geprüft, ergänzt, unter allen möglichen Gesichtspunkten kreuz und quer verglichen und ganz am Schluß, wenn man meint, man hätte alles verstanden, kommt plötzlich, quasi im Nebensatz heraus, daß es offensichtlich zwei Arten von Rekursionen gibt, solche, in Form von Datenstrukturen (Baumstrukturen) und ganz andere in Form von Algorithmen.

Es ist tatsächlich so, aber wir brauchen deswegen unser bisheriges Verständnis von Rekursionen nicht über Bord werfen. Hierzu wollen wir uns nochmals folgende beiden unterschiedliche Syntaxbäume ansehen.

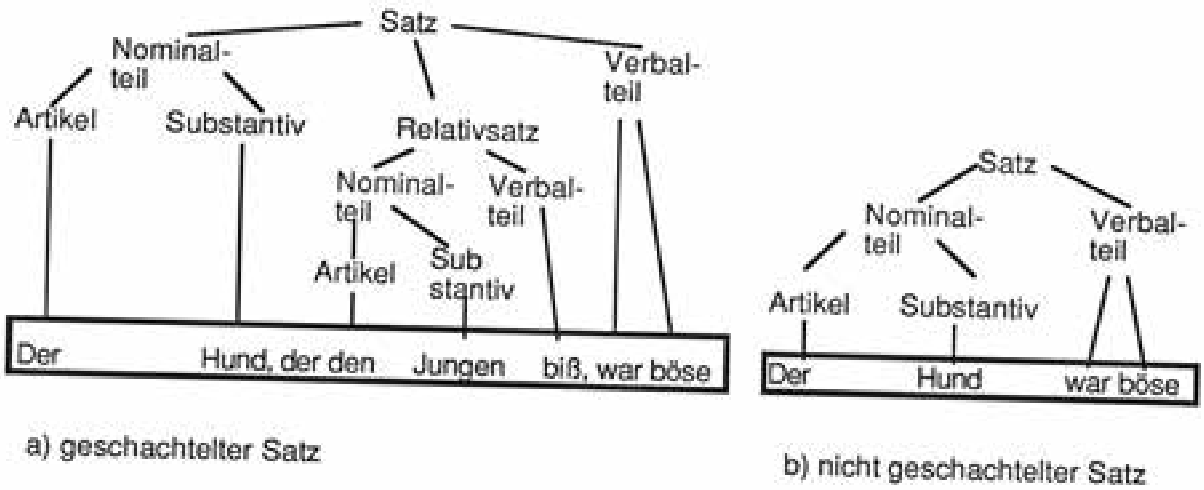


Abb. 3.37. : Syntaxbaum für Sätze mit und ohne Schachtelung.

Beiden Strukturen in Abb. 3.37 ist gemeinsam, daß es Baumstrukturen sind (was sonst?). Der Syntaxbaum nach a) im Gegensatz zu dem nach b) enthält als Teilbaum eine Struktur, die aus einer Schachtelung, d. h. einer rekursiven Ableitung hervorgegangen ist. Bei der Syntaxanalyse sind in beiden Fällen Keller(automaten) nötig, wie sie zum Durchsuchen von Baumstrukturen erforderlich sind. Bei den rekursiven Strukturen werden aus dem Keller zeitweise mehr als ein Nominalteil abgespeichert sein und die Nominalteile werden u.U. von einem Algorithmus analysiert, der z.B.

ANALYZENOMINALTEIL

heißt und sich selbst wieder rekursiv aufruft. Ganz allgemein können wir uns vorstellen, daß die Algorithmen den Datenstrukturen folgen und damit auch dynamisch die gleichen Strukturen bilden, die wir durch Beobachten und Aufzeichnen der Kellerinhalte ohne weiteres rekonstruieren könnten. Insofern besteht ein direkter Zusammenhang zwischen statischer Datenstruktur, z. B. in Form vordefinierter Syntaxbäume etc. und den dynamischen Abläufen der Algorithmen. Die dynamischen Abläufe können jedoch von den statischen Strukturen abweichen, weil sie z. B. bestimmte Wege im Labyrinth nicht durchlaufen, in Abhängigkeit von bestimmten Bedingungen, andere Wege u.U. mehr als einmal durchlaufen. Die Wege, und damit die Möglichkeiten der Freiheitsgrade sind jedoch durch die statische Struktur vorgegeben.

Abschließend zu diesem Abschnitt sei nochmals folgende Übersicht gegeben:

- Kontextsensitive Sprachen (Chomsky 1)

- Kontextfreie Sprachen (Chomsky 2)
    * Nicht rekursive Ausdrücke
    * Rekursive Ausdrücke
    * Iterative Ausdrücke

- Reguläre Sprachen (Chomsky 3)
    * Reguläre Ausdrücke
    * Iterative Ausdrücke

Tab . 3. 5 Einordnung von Rekursion und Iteration in die Chomsky - Hierarchie.

Wir kommen damit nochmals zurück zu den Chomsky - Hierarchien und sehen die Stellung von Rekursion und Iteration hauptsächlich innerhalb der einzelnen Sprachklassen. Mit diesem abschließenden Überblick wollen wir nun endgültig zu den musikalischen Rekursionen kommen.

3. 5. 4. 2 Musikalische Rekursion

Auf der Suche nach musikalischen Rekursionen muß man aufmerksam, um nicht zu sagen, manchmal mit dedektivischem Spürsinn vorgehen. Man kann nicht einfach ein Notenheft zu Hand nehmen und erwarten, daß sie einem ins Gesicht springen. Man muß vielmehr, wenn man die ersten einmal erkannt und verstanden hat , so nach und nach ein Gespür dafür entwickeln, und wird langsam die Eigenheiten verstehen, aufmerksam zuhören und kann dann immer mehr, oftmals ganz verborgene rekursive Strukturen entdecken. Nehmen wir trotzdem mal ein Notenhaft zur Hand, wobei ich mit meinem geliebten Chopin beginnen und zwar den 24 Préludes und schlagen das 1. Prélude auf. Dieses enthält bereits -glücklicherweise- eine der schönsten Rekursionen, die man sich vorstellen kann.

Diese stehtt in den Takten 17 bis 24 und ist zur deutlicheren Betrachtung in Abb. 3.38 nochmals getrennt herausgezogen:

<u>Abb. 3.38 a):</u> Rekursion in dem 1. Prélude op. 25 von Chopin

Wenn man diese Passage von Rekursionen unbelastet hört, hat man zunächst den Eindruck, daß hier in jedem Fall der Höhepunkt des Stückes erreicht wird. Das Thema strebt nach einer Wiederholung zu diesem Höhepunkt hin und klingt danach in einigen Wiederholungen aus. Wenn man etwas bewußter hinhört, wird man den Eindruck haben, daß dieser Höhepunkt durch eine sich steigernde Sequenz (in unserer Terminologie : Iteration) des aufwärtsgerichteten Grundmotivs erreicht und durch eine ebensolche Sequenz des abwärtsgerichteten Grundmotivs wieder verlassen wird. Man stellt weiterhin fest, daß Hin - und Rückentwicklung (wie alles bei Chopin) gut zusammenpassen und empfindet die gesamte Entwicklung als überaus ausgewogen. Soweit der allgemeine Eindruck.

Wenn man die Passage jedoch genauer analysiert, stellt man fest, daß hier eine Rekursion in Reinform vorliegt. Bevor wir dies im Detail ansehen, sei zur ersten Bestätigung dieser Behauptung folgendes Selbstexperiment angestellt: Man spiele selbst oder höre sich das Prélude bis zum Ende des Taktes an und unterbreche dann exakt nach der letzten Note.

Abb. 3. 38 b): 1. Hälfte der Rekursion

Man stellt dann fest, daß bis zu diesem Zeitpunkt ein Analyseprozess hochgelaufen ist, der durch die plötzliche Unterbrechung ein abruptes Ende erfährt. In unserer computerlinguistischen Ausdrucksweise können wir auch sagen: Während des Analyseprozesses wurde ein Keller aufgebaut, der zum Zeitpunkt der Unterbrechung seinen höchsten Pegelstand erreicht hat.

Mit diesem höchsten Kellerpegel ist gleichzeitig die größte Spannung verbunden, nämlich Spannung nach der Auflösung. Dabei erwartet man keine x - beliebige Auflösung, sondern diejenige, die den Keller wieder auf Null abbaut.

Diesen Vorgang wollen wir uns zunächst noch einmal am Beispiel der natürlichen Sprache veranschaulichen:

> "Der Besitzer des Hundes, welcher den Briefträger, der gerade die Post, welche er bei sich -

Dieses Beispiel enthält die geschachtelte Aneinanderreihung von vier Nominalteilen, zu welchen folgende Verbalteile passen:

> - hatte, austrug, biß, entschuldigte sich."

Genau dieselbe Auflösung haben wir im Prinzip auch in der Chopin´schen Rekursion in den darauffolgenden Takten:

a) Aufbau

b)Abbau

Abb. 3.9: Vollständige Rekursion in dem 1. Prélude.

Wir wollen nun die zugehörige formalsprachliche Ableitung dieser Rekursion genauer ansehen. Für die zugehörige generative Grammatik wollen wir folgende Ableitungsregeln annehmen, deren Plausibilität wir dann natürlich noch im einzelnen nachweisen müssen.

R.1: B -> h B r

R.2: B -> ε

Unter B wollen wir dabei ein Basisthema verstehen, welches aus den Basismotiven

h : Hinführung ____________________
r : Rückführung____________________

besteht, sowie einem möglichen Auftreten des Basismotivs selbst.

Das zugehörige Syntaxdiagramm besitzt dann folgendes Aussehen:

B

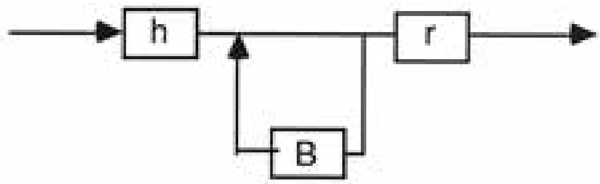


Abb. 3. 40: Syntaxdiagramm für die rekursive Ableitung

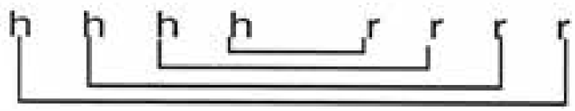
Mit Hilfe dieser Syntax lassen sich sehr einfach folgende Ableitungen bilden.

h r
h h r r
h h h r r r
h h h h r r r r
h h h h h r r r r r

wobei die markierte Ableitung genau der vorliegenden entspricht.

Vergleichen wir diese Ableitungen mit den nach Tab. 3.3 behandelten, so stellen wir bezüglich der Symmetrie der Symbolfolge eine starke Ähnlichkeit mit den Palindromen fest.

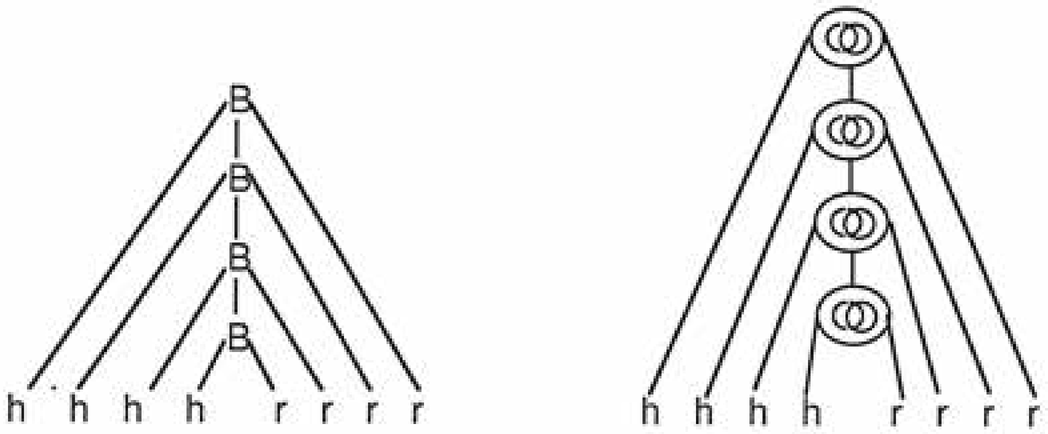
Wir können wie dort Paare bilden und uns gleichzeitig einen Auflösungsoperator (oben "Partnerschaftsoperator") hinzudenken. Wir können dann wie folgt schreiben:



bzw.

h (h (h (h ⚭r) ⚭ r) ⚭ r) ⚭ r

Der zugehörige Strukturbaum, bzw. Syntaxbaum hat dann folgendes Aussehen:



a) Strukturbaum

b) abstrakter Syntaxbaum
mit zusätzlichem
- Operator

Abb. 3. 41:

Wie sieht die zugehörige Abarbeitung auf dem Analysekeller des Hörers aus? - Ganz einfach, im Prinzip genauso, wie wir es von den Palindromen her kennen. Wir wollen die Kellerfolge vorsichtshalber nocheinmal für alle Analyseschritte angeben:

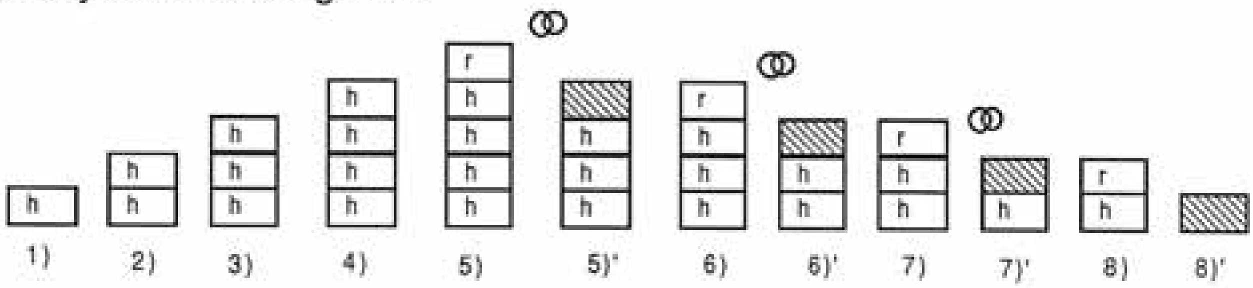


Abb. 3.42: Auf - und Abbau des Kellers bei der Rekursion des 1. Préludes

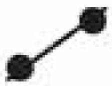
Die Behauptung, daß es sich bei der Chopin´schen Passage um eine Rekursion und nicht um zwei aufeinanderfolgende Iterationen handelt, soll anhand folgender Eigenschaften verifiziert werden, wobei wir nocheinmal mit dem Basisthema beginnen wollen.

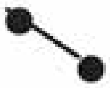
1. Das Basisthema B - übrigens des gesamten Préludes - besteht aus zwei eindeutig unterscheidbaren Basismotiven:

h z. B. 1. Takt

r z. B. 5. Takt,

welche sich insbesondere durch die Fortführungsrichtung der Melodietöne unterscheiden.

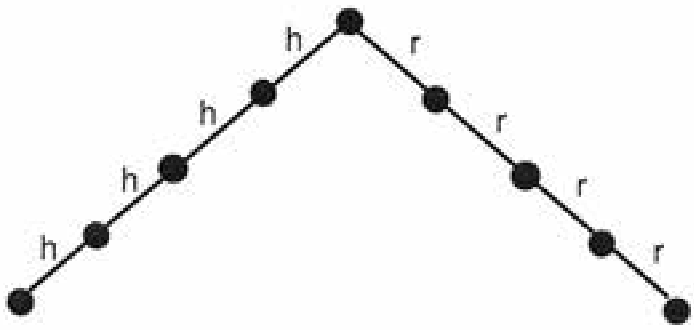
h  hoch

r  runter

2. Die gesamte Rekursionsstruktur ist symmetrisch, wie durch die Klammerung angedeutet.

und zwar:

a) sowohl bezüglich der melodischen Fortschreitungsrichtung (schematisch angedeutet),



b) als auch bezüglich der harmonischen Auflösungen.!

Um die unter 2b) genannte Eigenschaft zu überprüfen, wollen wir die durch die dazwischengeschachtelten Rekursionen getrennten "hr" - Paare wieder miteinander vereinigen und erhalten folgenden, umsortierten Notentext:

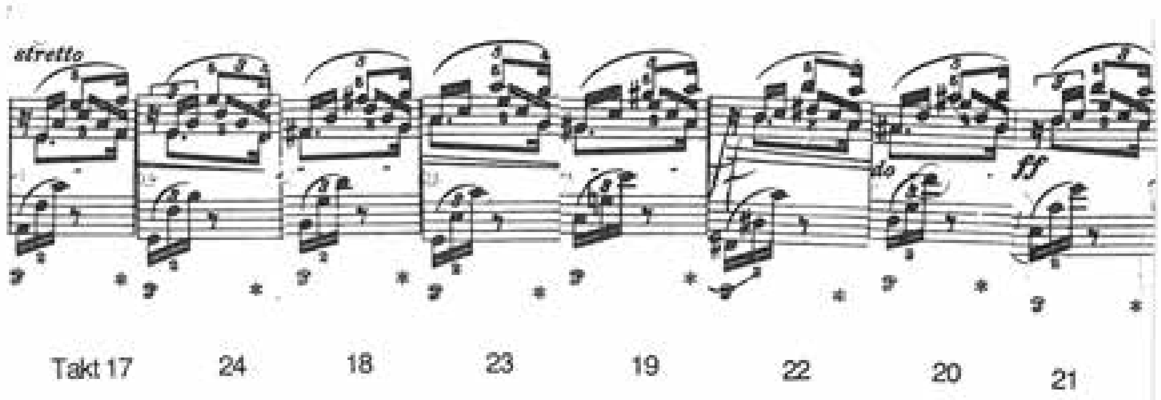


Abb. 3. : In Iteration umgewandelte Rekursion

Wir erhalten damit, was sich leicht durch Spielen des "verschüttelten" Notentextes überprüfen läßt, eine Iteration (Sequenz) der folgenden Struktur:

hr hr hr hr

was, wie sich ebenfalls leicht überprüfen läßt, der oben angegebenen iterativen Ableitungsregel

I. 2 $B^{I}_{2} \rightarrow (h\ r)^{*}$

entspricht. Durch Vergleich des Chopin´schen Originals mit mit dem Plagiat empfinden wir ohne jede weitere Erklärung die ungeheuer viel stärkere Steigerungswirkung der Rekursion gegenüber der Iteration.

Wer bis zu diesem Punkt noch immer zweifelt, daß es sich wirklich um eine Rekursion handelt, der soll, hoffentlich endgültig, von Chopin selbst überzeugt werden.

Hierzu müssen wir jedoch nocheinmal etwas ausholen: Wie wir bei der ausführlichen allgemeinen Diskussion der Rekursion festgestellt haben, müssen wir grundsätzlich aufpassen, daß wir es nicht mit verkappten Iterationen zu tun haben. Wir hatten weiterhin festgestellt, daß Hierarchiebildner, z.B. in Form von Klammern, benötigt werden, um Eindeutigkeit herbeizuführen. Wir hatten bei der Einführung der polnischen Postfix - Notation und am Beispiel der Palindrome schließlich festgestellt, daß Klammern zwar hilfreich, aber im Grunde bei geeigneter Symbolreihenfolge sogar entbehrlich sind. Da es in der Musik keine Klammern gibt, ist diese Tatsache sogar sehr angenehm.

Aber gibt es wirklich keine Klammern in der Musik? Hierzu wollen wir uns den Originaltext nocheinmal ganz genau ansehen und mit unserer vervollständigten, angenommenen Ableitungsstruktur vergleichen. Wir hatten oben geschrieben:

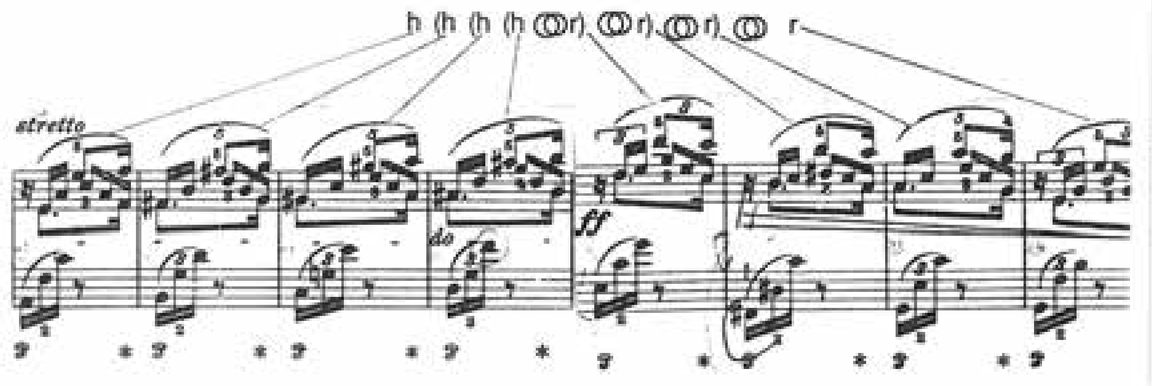


Abb. 3.44: Notentext mit rekursiver Ableitungsstruktur

und können diese Struktur dem Notentext zuordnen (s. Abb. 3.44).

Wenn wir dies tun, so entdecken wir folgendes:

1. Die gesamte Rekursionsstruktur ist charakterisiert durch eine stretto - Anweisung.

2. Der eigentliche Rekursionsbeginn ist markiert durch
   - Fortfall der führenden $^1/_{16}$ - Pause zum Zwecke der weiteren Beschleunigung.

3. Der Rekursionsabbau ist markiert durch die
   - Wiedereinführung der führenden $^1/_{16}$ - Pause zum Zwecke der Verlangsamung.

4. Das Rekursionsende ist markiert durch die
   - breite Quintole (nicht zu verwechseln mit dem obigen Fortfall der $^1/_{16}$ - Pause !) zum Zwecke des Auslaufens.

Daß sich so spezielle Eigenschaften von Rekursionen im Notentext tatsächlich wiederfinden, oder umgekehrt, daß sich ganz spezielle Kompositionsanweisungen wie

- steto
- Fortfall der $^1/_{16}$ - Pause
- Wiedereinführung der $^1/_{16}$ - Pause
- Quintole

formal begründen lassen, ist eigentlich eine erstaunliche Feststellung! Wir können, ohne Chopin irgendwie Unrecht zu tun, sicher davon ausgehen, daß er nie etwas von formalen Sprachen und Rekursionen gehört hatte. Trotzdem hat er die wunderschönsten Rekursionen in Musik realisiert und diese bis ins Detail ausformuliert! Dies spricht einmal mehr für seine geniale Beherrschung der musikalischen Sprache und den virtuosen Umgang mit ihr.

Nachdem wir an einem ersten Beispiel die musikalische Rekursion ausführlich studiert haben, wollen wir, bevor wir weitere beispiele kennenlernen, uns zunächst mit der 3. Grundstruktur, dem Zyklus, beschäftigen.

3. 5. 5 Zyklen

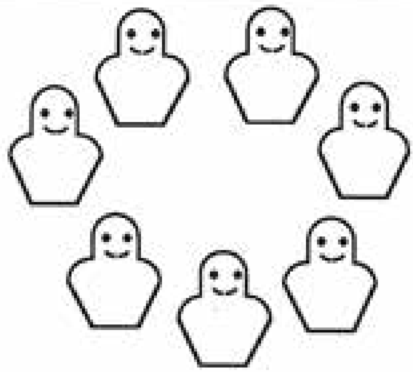
3. 5. 5. 1 Allgemeine Erläuterung

Unter *Zyklus* versteht man eine in sich geschlossene Struktur mit der Eigenschaft, von einem beliebigen Element innerhalb der Struktur in Vorwärtsrichtung wieder zum Ausgangselement zu führen. Der Begriff Zyklus basiert auf der geometrischen Vorstellung eines Kreises, welcher eben diese Eigenschaft besitzt.

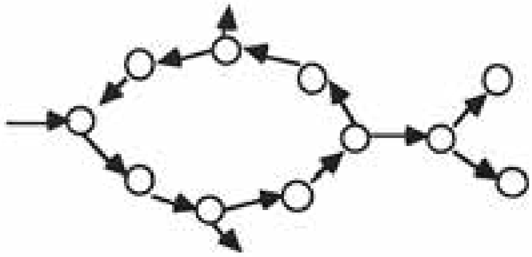
Vom Zyklus haben wir alle, vielleicht im Gegensatz zur Rekursion, eine anschauliche und zumeist intuitiv richtige Vorstellung. Trotzdem wollen wir, genau wie bei der Iteration und der Rekursion zunächst wieder eine Reihe unterschiedlicher, nicht musikalischer Beispiele betrachten, um unser Grundverständnis zu überprüfen und zu festigen. Wir werden dabei, wie so oft beim reflektierenden Studium, feststellen, daß wir manchmal mehr über vermeintlich bereits abschließend behandelte Sachverhalte, hier Rekursion und Iteration, hinzulernen, als über den jeweils neuen.

Beispiel für Zyklen

- Zyklische Anordnung von Gegenständen



- Durchlaufen eines kreisförmigen Labyrinths



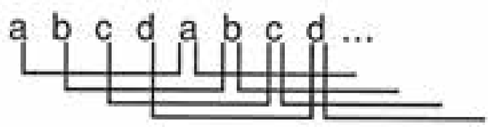
- Bildung zyklischer Zahlenfolgen

1 2 3 4 1 2 3 4 ...

- Wiederholen von Operationen

I := (I+1) MOD N

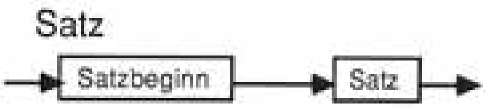
- Bildung zyklischer Symbolfolgen



- Bildung von Klammerausdrücken

(a) (b) (c) (d) (a) (b) (c) (d) ??

- Bildung zyklischer Sätze



Tab 3. 5: Beispiele zyklischer Strukturen

Gehen wie die Beispiele wieder der Reihe nach durch:

Um wieder mit den russischen Puppen anzufangen, stellen wir uns vor, daß wir diese, um eine zyklische Struktur zu bilden, einfach im Kreis aufstellen. Im Gegensatz zur Iteration und Rekursion können wir dabei folgende Eigenschaften feststellen:

1. Es gibt keine erste und keine letzte Puppe.

2. Alle Puppen sind gleich.

3. Jede Puppe hat eine linke und eine rechte Nachbarpuppe.

4. Beim zyklischen Durchlaufen kann, wenn man keine Puppe markiert, im Grunde gar nicht festgestellt werden, aus wievielen Puppen der Zyklus besteht.

Hiermit haben wie bereits einige wichtige, leicht verallgemeinerbare Eigenschaften abgeleitet, die wir an den übrigen Beispielen verifizieren wollen.

Zur Veranschaulichung der Labyrinthsuche als Beispiel einer Rekursion hatten wir in Tab. 3.3 eine Baumstruktur gezeichnet. Natürlich ist ein baumartiges Labyrinth ein spezielles Labyrinth und da man diese Eigenschaft beim Betreten eines Labyrinths i.a. nicht kennt, muß man also auch auf Zyklen gefaßt sein. Aus diesem Grund hatte die kluge Ariadne dem von ihr geliebten Theseus zusammen mit dem Faden auch gleichzeitig die Regel zum Erkennen von Zyklen mitgeliefert: "Siehst Du einen (oder zwei) Fäden vor Dir, so kehre um." Hätte Theseus diesen Faden nicht besessen und sich an irgendeiner Stelle eines Zyklus´ im Labyrinth befunden, so würden tatsächlich die für die im Kreis aufgestellten russischen Puppen abgeleiteten Regeln 1 bis 4 gelten. Dank des Fadens hat er aber die Eintrittsstelle tatsächlich markiert, sodaß die Regeln 1 und 4 außer Kraft gesetzt wurden.

Mit Rekursionen hatten wir ein (baumartiges) Labyrinth angegeben, und gleichzeitig hatten wir gesagt, daß all diesen gemeinsam eine hierarchische Struktur ist. Was ist aber nun mit Labyrinthen, welche Zyklen enthalten?

Wir hatten bereits oben verworfen, daß es zyklische Hierarchien gibt. Stürzt dann aber nicht die ganze schöne Modellvorstellung einer hierarchisch geordneten Welt durch eine kleinen Seitengang im Labyrinth in sich zusammen?
Die Antwort lautet hart und kompromisslos:

JA!

Trotzdem wollen wir wissen, warum dieses so ist, und was sich eventuell zur Rettung des bisherigen Wissens noch unternehmen läßt. Zunächst müssen wir uns nochmal ganz klar machen, worin das Problem besteht:

- Im baumartigen Labyrinth ebenso, wie in jeder Baumstruktur ergibt sich die Hierarchiestufe jedes Punktes eindeutig aus dem Abstand zum Ausgangspunkt (bei Bäumen auch Wurzel genannt).

- Jeder Punkt besitzt nur einen solchen Abstand, auch Tiefe genannt.

- Im zyklischen Labyrinth gibt es keinen eindeutigen Abstand mehr. Abgesehen von der Tatsache, daß man einen Punkt im Zyklus i.a.von links und von rechts erreichen kann, ist es nicht verboten, einen Zyklus mehrfach zu durchlaufen. Hierbei läßt sich eine Tiefe gar nicht mehr definieren.

Wie können wir aber unser bisheriges Wissen, welches wir uns von Chomsky - Grammatiken bis zu den Kellerautomaten so mühsam angeeignet haben, angesichts zyklischer Strukturen denn doch noch retten?

Ganz einfach! Indem wir nämlich die Behandlung, speziell das Absuchen der neuen, zyklischen Strukturen auf die Behandlung der altvertrauten Baumstrukturen zurückführen, wie es im folgenden veranschaulicht ist:

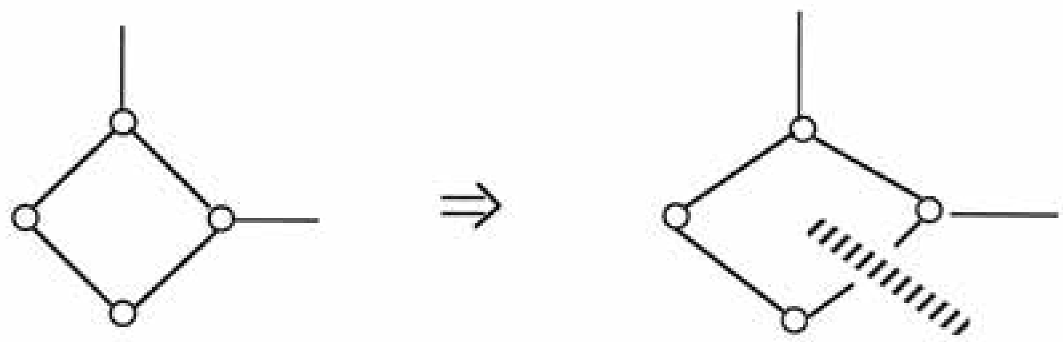


Abb. 3.45: Auflösung einer zyklischen Struktur.

Was wir hierzu tun müssen, ist ebenfalls ganz einfach: Wir schneiden den betreffenden Zyklus auf, und erhalten somit zwei Äste eines Teilbaums. Dies tun wir so oft, wie Zyklen vorhanden sind. Nichts anderes hat natürlich auch Theseus getan: Sobald er den Ariadnefaden vor sich sah, ging er zurück, als ob eine Wand, die den Zyklus versperrt hätte, vor ihm gewesen wäre.

Mit diesem einfachen Trick haben wir nicht nur einen möglichen Teufelskreis durchbrochen, sondern auch gleichzeitig unser Wissen weiter anwendbar gehalten. Daß wir den Zyklen mit ihren sonstigen, schönen Eigenschaften vielleicht Unrecht getan haben, nehmen wir bedauernd, aber leichten Herzens zu Kenntnis.

Nach diesem Exkurs in die grundsätzlichen Unterschiede zwischen Zyklen und Rekursionen kommen wir mit den nächsten Beispielen in enge Berührung mit unserer anderen Grundstruktur, der *Iteration*. Betrachten wir hierzu die zyklische Zahlenfolge

1 2 3 4 1 2 3 4 ...

so können wir diese zunächst noch nicht ansehen, ob diese einer iterativen

1 2 3 4 1 2 3 4 ...

oder einer zyklischen Gesetzmäßigkeit

1 2 3 4 1 2 3 4 ...

genügen. Erst, wenn wir das zyklische Bildungsgesetz betrachten,

$$I \rightarrow I+1$$

$$I+1 \rightarrow (I+1) \text{ MOD } N$$

$$(I+1) \text{ MOD } N \rightarrow I$$

welches in Tab 3. 5 verkürzt dargestellt wird,

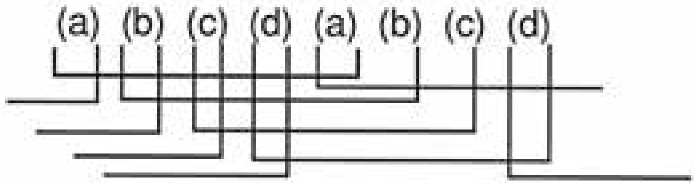
$$I := (I+1) \text{ MOD } N$$

mit MOD als MODUL0 - Funktion, erkennen wie den zyklischen Charakter. Das Beispiel:

a b c d a b c d

zeigt einfach noch einmal eine andere Symbolfolge mit genauer Klammerung.

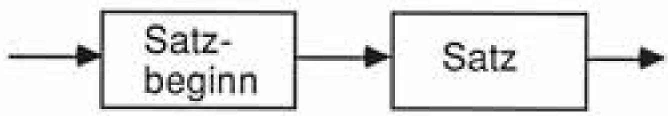
A propos "Klammerung". Wie sieht es damit aus bei zyklischen Strukturen? Bei der Behandlung iterativer und rekursiver Strukturen hatten wir die Klammern eingeführt und schließlich als Hierarchiebildner entlarvt und verallgemeinert. Bei den Zyklen jedoch hatten wir Hierarchiebildner weit von uns gewiesen. Warum, wollen wir anhand des angegebenen Klammer- ausdruckes nochmals kurz veranschaulichen.



Wenn wir bei diesem vollständig geklammerten Ausdruck die zugehörigen Klammern einander zuordnen möchten, so stellen wir fest, daß diese Zuordnung nicht zwischen benachbarten linken und rechten Klammern zu erfolgen hätte, sondern über einen ganzen Zyklus hinweg. Die angegebenen Klammern nützen also gar nichts, ebensowenig irgendeine andere Klammeranordnung, wie der zeifelnde Leser selbst ausprobieren kann. Wie man auch hierbei sieht, entzieht sich der Zyklus der Hierarchieordnung.

Das letzte Beispiel aus dem natürlichsprachlichen Bereich zeigt noch einmal das Schema einer einfachen, zyklischen Ableitungsregel in Form des Syntaxgraphen:

Satz



Die Regel besagt, daß jeder Satz nach dem Satzbeginn durch ein vollständiges Exemplar seiner selbst fortgesetzt wird.

Ein schönes Beispiel für eine solche Ableitungsstruktur ist der Kinderreim

"Ein Mops kam in die Küche,
...".

Welches ist nun der Unterschied zur Iteration? Zeichnen wir uns hiervon den entsprechenden Syntaxgraphen zum Vergleich auf:

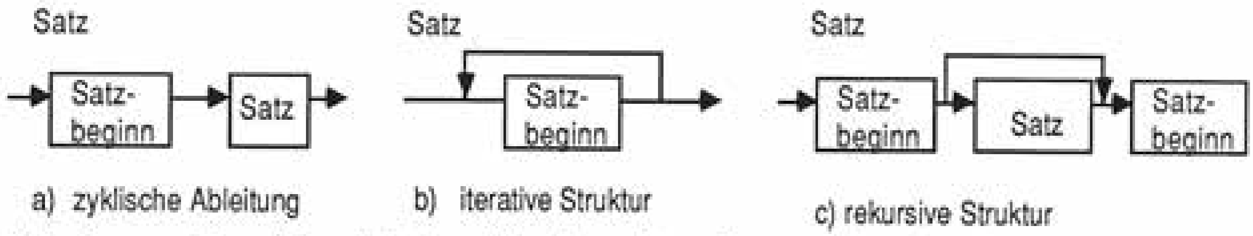


Abb.3. : Zum Vergleich zyklischer, iterativer und rekursiver Ableitungsstrukturen

Der wesentliche Unterschied zwischen zyklischer und iterativer Struktur ist der, daß die zyklische nie endet, während die iterative potentiell endet.

Der wesentliche Unterschied zwischen zyklischer und rekursiver Struktur ist der, daß die rekursive Struktur geschachtelt ist und potentiell endet.

Welcher Zusammenhang besteht jetzt aber noch zwischen Ableitungsstrukturen, welche ja bisher prinzipiell baumartig waren, und zyklischen Labyrinthstrukturen?

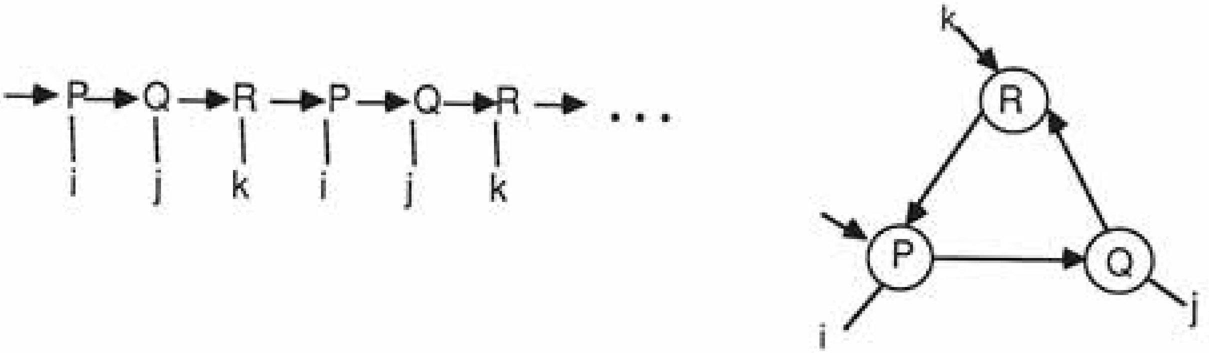
Betrachten wir hierzu folgende zyklische Ableitungsregeln:

P -> i Q

Q -> j R

R -> k P

so läßt sich hieraus folgender Ableitungsbaum konstruieren (Abb. 3.47a))



a) baumförmige Darstellung

b) zyklische Darstellung

Abb. 3.47: Zyklische Ableitungsstruktur

Abb. 3.47b): zeigt demgegenüber die zyklische Darstellung der Ableitungsstruktur, wie wir sie bereits im Labyrinth vorgefunden haben.

Was passiert nun bei der Analyse solcher zyklischer Strukturen mittels eines Kellers? Ganz einfach: Er wird solange aufgebaut, bis er irgendwann einmal überläuft. (Abb. 3.48)

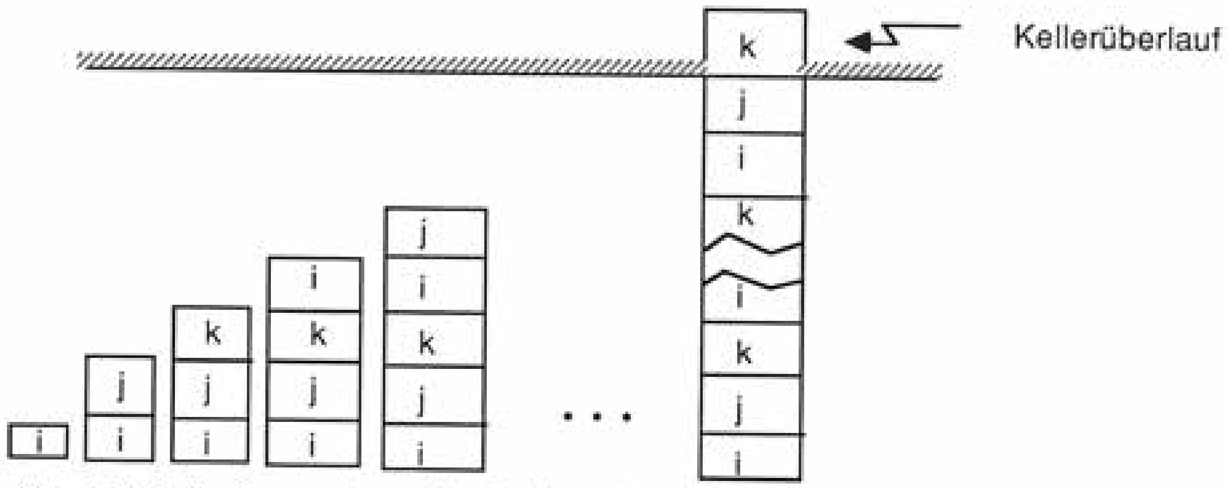


Abb. 3.48: Kelleraufbau bei der Analyse zyklischer Strukturen mit Kellerüberlauf.

Dieser Vorgang des Kellerüberlaufs, den wir bisher nicht diskutiert haben, stellt ein grundsätzliches Problem dar:

Jeder rekursive Analyseprozess bedient sich eines Kellerautomaten, welcher zur Realisierung des Kellers einen endlichen Speicher benötigt. Sobald die Kapazität dieses Speichers überschritten ist, geht die Analyseinformation verloren. Man kann dieses oftmals beim Sprechen anderer Personen beobachten, dergestalt , daß Sätze, insbesondere geschachtelte, nicht richtig beendet werden. Bei zyklischen Analysevorgängen tritt dieser Speicherüberlauf wegen der Unendlichekeit der Ableitung zwangsweise auf. Man bricht den Analysevorgang ab, weil eine Rückverfolgung nicht mehr möglich ist. Zyklen stellen eine für die Analyse sehr komplexe Grundstruktur dar.

Die Zyklen führen uns in die Welt der Graphen, die die allgemeinen Strukturen darstellen, d.h. also die Baumstrukturen beinhalten. Um eine Vorstellung von der Vielfalt der Strukturen zu vermitteln, sei die folgende Übersicht gegeben (Abb. 3.49)

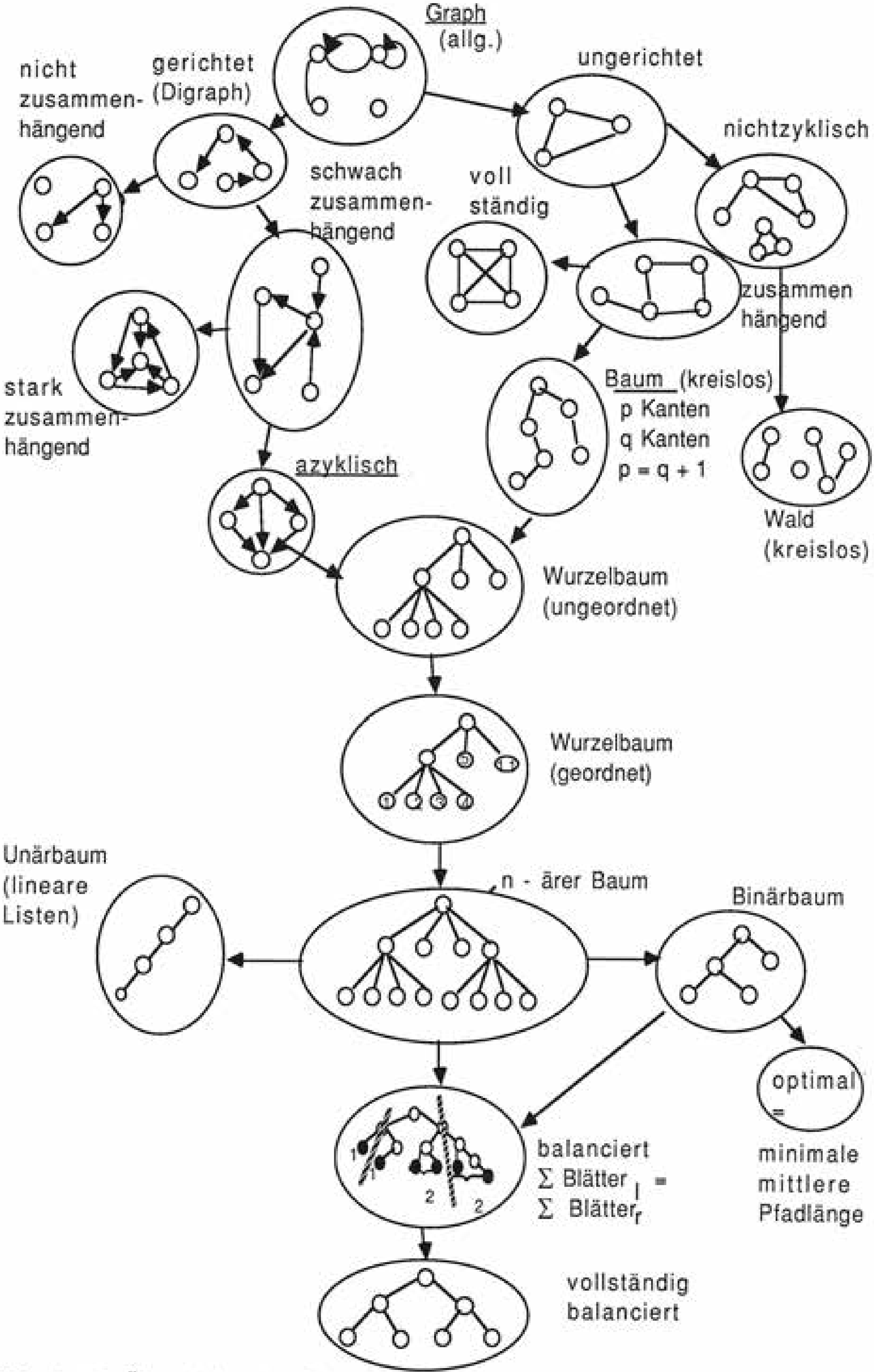


Abb. 3.49: Übersicht über Graphen

Wir wollen diese Phänomenologie der Strukturen vorerst nur zur Kenntnis nehmen, und später sehen, ob wir auch musikalisch etwas damit anfangen können.

Bevor wir die allgemeine Diskussion der Zyklen verlassen, und uns den musikalischen Beispielen zuwenden, wollen wir uns vorsichtshalber noch eine wichtige Grundsatzfrage stellen:

Was unterscheidet eigentlich Zyklen von Iterationen und von Rekursionen? Lassen sich russische Puppen zyklisch ineinanderschachteln? Gibt es zyklische Klammer-ausdrücke? Gibt es zyklische Hierarchien??

Nein! Nicht in unserer realen Welt!

Trotzdem kann man soetwas konstruieren. Abb. 3.50 zeigt einen hierarchischen Zyklus, aber, wenn man genauer hinsieht, natürlich in einer irrealen Welt.

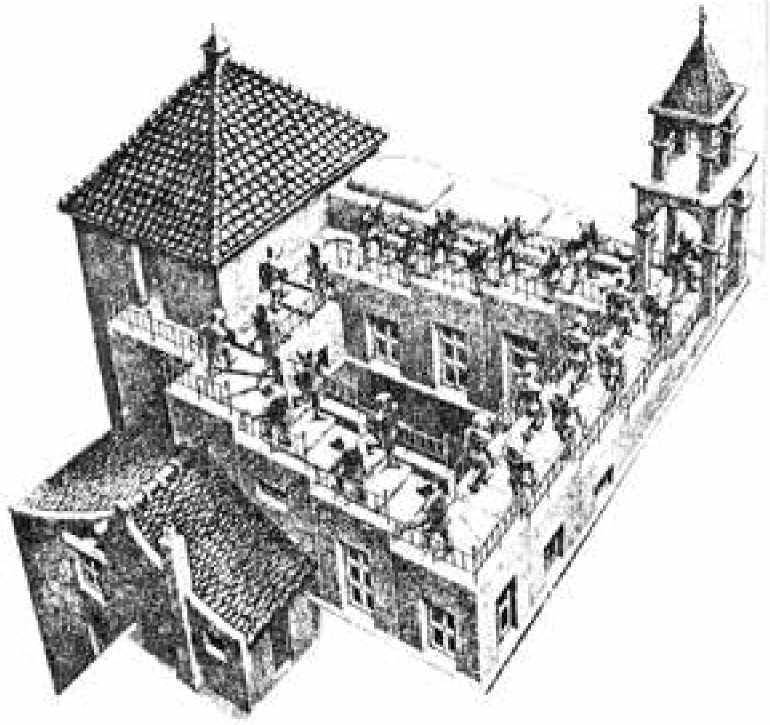


Abb. 3.50: Hierarchischer Zyklus in "Treppauf Treppab" von Escher [Hof79]

Hofstadter behandelt in [Hof 79] dieses und viele andere Phänomene in so einmaliger Art, daß wir gar nicht erst versuchen wollen, dieses Thema hier weiter zu vertiefen.

A propos Hofstädter: "Gödel, Escher, Bach, - ein Endlos Geflochtenes Band": Allen an Brückenschlägen zwischen den Fachwelten im allgemeinen, zwischen Mathematik, Musik und Malerei mit Informatik als der gedanklichen Klammer im besonderen, und inzwischen an Rekursionen im speziellen interessierten Lesern sei dieses Werk sehr empfohlen.

Doch nun wollen wir uns endlich den musikalischen Zyklen zuwenden.

3. 5. 5. 2 Musikalischer Zyklus

Ein wunderschönes Beispiel für einen musikalischen Zyklus findet man im 19. Prélude op. 28 von Chopin

Abb. 3.51: Musikalischer Zyklus im 19. Prélude op. 28 von Chopin

Bevor wir diese Passage näher ansehen, wollen wir sie erst einmal spontan auf uns wirken lassen: Wenn wir das Prélude von Anfang an hören und an diese Stelle gelangen, haben wir den Eindruck sich gegenseitig ablösender, aber nie einander auflösender, verminderter Septakkord- folgen, welche ohne Zweifel einem Höhepunkt zustreben. Dies erfolgt in gewisser Weise vergleichbar zum vorher behandelten Beispiel im 1. Prélude.

Im Gegensatz zum früheren Beispiel bricht jedoch die Figur ab und das Thema setzt nach einer 1/8 Pause in Takt 34 frisch ein. Eine abbrechende Struktur haben wir bisher noch nicht behandelt! - Oder doch? Bricht nicht auch bei den russischen Puppen irgendwo die Rekursion ab und laufen wir nicht auch im Labyrinth in endliche Sackgassen, in denen es nicht mehr weitergeht? Nein! Denn in beiden Fällen ebenso, wie in dem oben behandelten, läuft die Rekursion natürlich zurück: Die Puppen werden nach der Aufstellung richtig zusammengesetzt und das Labyrinth wieder rückwärts verlassen. (woher der Name Rekursion ja schließlich kam).

In unserem Beispiel bricht der Prozeß aber tatsächlich ab, und zwar am innersten Punkt, der in unserem Fall den Höhepunkt darstellt. Was ist geschehen?

Sehen wir uns hierzu die Motivfolge genauer an: Wir finden im Notentext eine Folge von

- 6 Zweierfiguren der verminderten Septakkorde

welche, beginnend mit dem Ton e, jeweils in

- Ganztonschritten nach oben

übereinander geschichtet sind. Diese Stütztöne der Ganztonschritte können wir stellvertretend für die Motive in einer Struktur darstellen (s. Abb. 3.52).

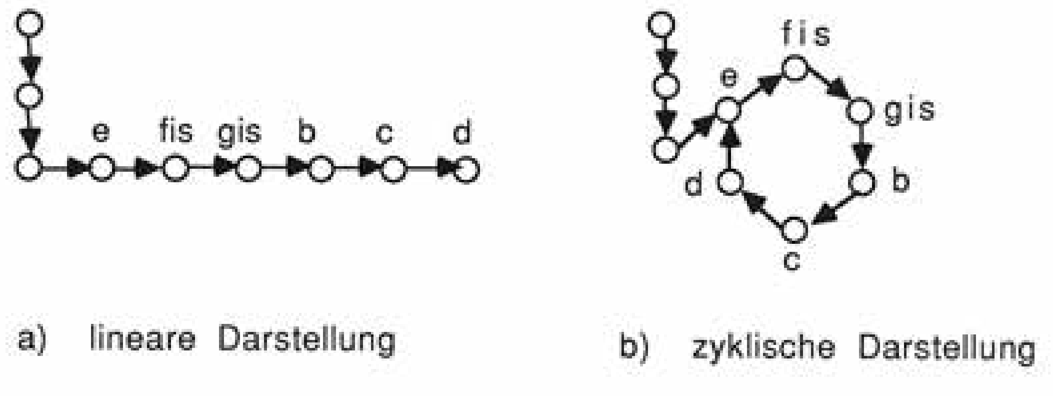


Abb. 3.52: Struktur der abgebrochenen Rekursion im 19. Prélude von Chopin

Wenn wir einfach die Ganztonschritte verfolgen, so erhalten wir eine lineare Stuktur, wie nach a). Wenn wir jedoch die periodische Eigenschaft unseres Tonsystems berücksichtigen, erhalten wir eine zyklische Struktur wie nach b).

Das "Verrückte" ist nun, daß Chopin tatsächlich eine Zyklenerkennung in seine Labyrinthsuche eingebaut hat. Er hat, ehe er beinahe durch einen weiteren Ganztonschritt auf die Note e" den nächsten Zyklus eingeleitet hätte, diese Tatsache vorausschauend erkannt und das Kreisen durch einen abrupten Halt verhindert.

Verrückt ist weiterhin, daß es tatsächlich zyklische Rekursionen in der Musik gibt, wie wir es oben zunächst für die reale Welt ausgeschlossen haben und uns lediglich durch die im Kreis wandelnden Mönche von Escher veranschaulicht haben (s. Abb. 3.50).

Erinnern wir uns an die Labyrinthsuche von Theseus: Stellen wir uns vor, Theseus hätte einen zyklischen Labyrinthgang erwischt und hätte sich nur nach Ariadnes Rat zum Absuchen baumartiger Labyrinthe erinnert. Was hätte er getan? - Nun, ohne einen Rekursionsalgorithmus für diesen Fall wäre er entweder

- weitergelaufen, bis der hilfreiche Ariadnefaden zu Ende gewesen wäre

oder

- stehengeblieben, in der Hoffnung, daß ihm ein gütiger *deus ex machina* an den Anfang zurückversetzt oder auf andere Weise aus der Klemme geholfen hätte.

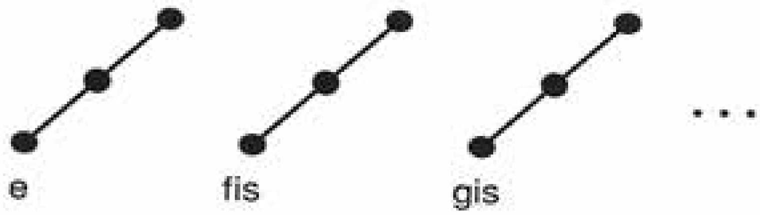
Und genau das tut Chopin: Er greift tatsächlich wie ein deus es machina in das Geschehen ein und versetzt den Hörer an den sicheren Ausgangspunkt, d.h. den Beginn des Themas, zurück. Wie wir an weiteren Beispielen später noch sehen werden, ist dies übrigens nicht die einzige Art, eine zyklische Struktur zu verlassen. Es gibt auch die Möglichkeit, sich quasi "durch die Seitentür" aus der Schwierigkeit zu befreien (s. u.a. Beispiel aus der 1. Etüde op. 10 von Chopin).
Interessant ist im 19. Prélude, daß nach der Unterbrechung und dem Wiederaufsetzen eine ganz ähnliche Struktur auftritt (Takte 44 und 45), aus der der Hörer aber rekursiv wieder sicher herausgeleitet wird (Takte 46 bis 49). Hat man beim 2. Versuch vielleicht aus der Erfahrung gelernt?

Eine andere, das Wesen der musikalischen Zyklen betreffende Frage wurde aber bisher gar nicht richtig behandelt: Wieso stellt die Figur in den Takten 33 und 34 überhaupt einen Zyklus dar und nicht einfach eine Iteration, die Chopin deswegen abgebrochen hat, weil ihm eine weitere Fortsetzung als zu eintönig erschienen wäre?

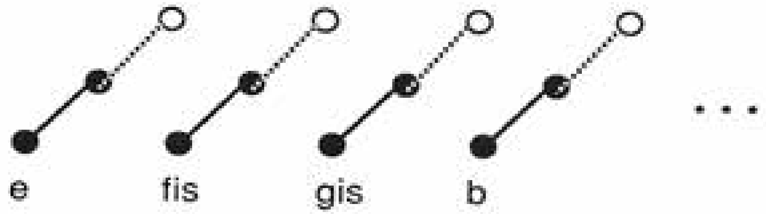
Wir wollen diese fundamentale Frage zunächst am vorliegenden Beispiel behandeln, später aber, eben weil sie so fundamental ist, dafür einen eigenen Abschnitt aufmachen. Wir hatten zu dieser Frage, wenn wir uns erinnern, anfangs einfach intuitiv festgestellt, daß das Prélude an dieser Stelle einem Höhepunkt zustrebt, ähnlich, wie in der Rekursion im 1. Prélude.

Wodurch wird nun dieser Eindruck erzielt? Die Antwort ist wiederum einfach: Der Eindruck wird erzielt, indem die Motive verkürzt, d.h. konkret abgeschnitten werden.

Während im gesamten Prélude bis dahin das Metrum durch 3/8 - Motive bestimmt wird, wird dieses im Zyklus auf 2/8 - Motive verkürzt, wie es in Abb. 3.53 schematisch dargestellt ist.



a) 3/8 - Motive, unverkürzt



b) 2/8 -Motive, verkürzt

Abb. 3.53: Motivische Verkürzung im Zyklus

Diese Verkürzung bewirkt, daß ein Motiv bereits durch das nächste unterbrochen wird, bevor es zu Ende gekommen ist. Dieses ist aber genau eine Eigenschaft rekursiver Strukturen.

Wer es nicht glaubt, der möge zum Vergleich die nicht rekursive Form nach Abb. 3.53a) ausprobieren. Er wird dann "am eigenen Leibe" deutlich den Unterschied zwischen dem Chopin'schen Zyklus und einer einfachen Iteration feststellen.

3. 6 Vergleich der musikalischen Grundstrukturen

Wenn wir uns an den Anfang des Abschnittes "3. 5 Grundstrukturen" zurückbesinnen, so sind wir angetreten mit der Behauptung, daß die klassische Struktur der

- Sequenz

nicht ausreiche, um eine Reihe musikalischer Phänomene adäquat zu beschreiben. Wir hatten demgegenüber die Strukturen

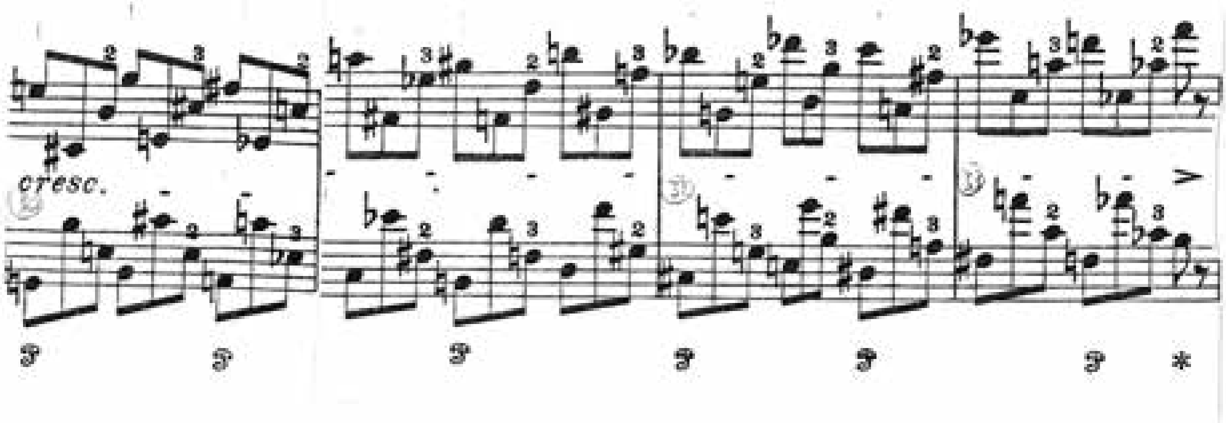
- Iteration
- Rekursion
- Zyklus

eingeführt und an zahlreichen außermusikalischen und weniger musikalischen Beispielen in Reinform behandelt. Nachdem wir im außermusikalischen Bereich unsere Modellvorstellungen durch alle möglichen Fragen und Fangfragen überprüft und langsam vervollständigt haben, sollten wir dieses im musikalischen Bereich ebenfalls tun.

Sehen wir uns zunächst nochmal unsere typischen Beispiele an:

a) Iteration aus 4. Etude, op. 10

b) Rekursion aus 1. Prélude, op. 25



c) Zyklus aus 19. Prélude, op. 25

Abb.3.54: musikalische Grundstrukturen in ausgewählten Werken Chopins

Zeichnen wir uns hiervon nochmals die entsprechenden graphischen Strukturen auf,

a) Iteration b) Rekursion c) Zyklus

Abb. 3.56: Allgemeine Grundstrukturen in graphischer Darstellung

sowie die formalsprachliche Ableitungsstruktur (s. Abb 3. 56)

a) Iteration	b) Rekursion	c) Zyklus
		$A_Z \rightarrow P$
		$P \rightarrow i\ Q$
$A_I \rightarrow x^*$	$A_R \rightarrow h\ A\ r$	$Q \rightarrow j\ R$
	$A_R \rightarrow h\ r$	$R \rightarrow k\ P$

Abb. 3.56: Ableitungsregeln für Grundstrukturen

Bevor wir die musikalischen Unterschiede genauer betrachten, wollen wir uns die Ausgangsproblematik an den formalsprachlichen Ableitungen klarmachen.

Hierzu wollen wir, ausgehend von den Ableitungsregeln in Abb. 3.56, folgende einfache Symbolfolgen bilden:

A_I -> xxxx
A_R -> hhhhrrrr
A_Z -> ijkijk...

Abb. 3.57: Symbolfolgen entsprechend Grundstruktur

Die zentrale Frage lautet, wie wir diese Folgen musikalisch voneinander unterscheiden können. Die Antwort lautet zunächst: Aufgrund Abb. 3.57 können wir sie überhaupt nicht unterscheiden! Wir benötigen also mehr Information über ihre Eigenschaften, z. B. in Form der oben erwähnten Attribute.

Bevor wir diese zu ergründen versuchen, sollten wir uns nochmals klarmachen, daß unser Unterscheidungsproblem strenggenommen in folgende drei Teilunterscheidungsprobleme zerfällt:

a) Iteration vs. Rekursion

b) Iteration vs. Zyklus

c) Rekursion vs. Zyklus

Trotzdem wollen wir versuchen, die Welt doch einfacher zu belassen, als es die Systematik zunächst erfordern würde. Hierzu wollen wir uns zunächst

Rekursion und Zyklus

vornehmen und folgende, einfache Überlegung anstellen:

Stellen wir uns wieder vor, wir würden beim Hören des 19. Prélude das Problem einer Labyrinthsuche zu lösen haben, wobei das Labyrinth Sackgassen und Zyklen enthält. Dann müßten wir beim Hineinlaufen in einen Labyrinthabschnitt zunächst i.a. noch nicht, um welchen Typ es sich handelt, eine Sackgasse oder einen Zyklus. Wir müssen uns also die Rückkehrinformation speichern, mit anderen Worten einen Ariadnefaden mitführen, oder mit noch anderen Worten, einen Keller aufbauen.

Unter diesem Aspekt sind Rekursionen und Zyklen gleich, denn, wie wir oben gesehen haben, lassen sich Zyklen durch Aufbrechen wie ganz normale Baumstrukturen behandeln und sind in diesem Fall rekursiver Natur. Wir können diese Identität nochmals so veranschaulichen:

a) Rekursion

b) rekursiver Zyklus

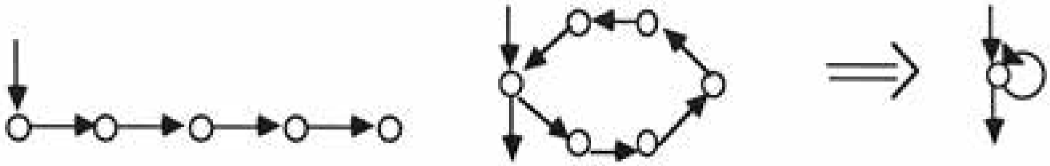
Abb. 3.58 :Gegenüberstellung von Rekursion und rekursivem Zyklus

$$\text{Zyklus}_{\text{rek.}} = \text{Rekursion}$$

Demgegenüber gibt es natürlich auch iterative Zyklen, und zwar einfach aufgrund der Periodizität unseres Tonsystems. Typische Beispiele für solche iterativen Zyklen sind trivialerweise:

- Tonleitern
- Quintenzirkel.

Wir können diese Identität ebenfalls wie folgt graphisch darstellen:



a) Iteration

b) iterativerZyklus

c) entarteter Zyklus

Abb. 3.59: Gegenüberstellung von Iteration und iterativem Zyklus

und schreiben

$$\text{Zyklen}_{\text{iterat.}} = \text{Iteration}$$

Der Zyklus hat somit zwei Ausprägungen, eine

- iterative

und eine

- rekursive

und weist innerhalb der allgemeinen Struktur Iteration und Rekursion lediglich die Besonderheit auf, in sich geschlossen zu sein. Zyklen können dabei, wie wir bereits gesehen haben und wie wir noch an verschiedenen wieteren Beispielen sehen werden, realisiert sein z.B. mittels:

- Tonleitern
  - diatonisch
  - chromatisch
  - ganzton

- Quintenzirkel
  - diatonisch
  - chromatisch

Ein Zyklus kann sogar zur einfachen Iteration entarten (s. Abb. 3 59c)), wie in Abb.3.22 und 3.23 dargestellt.

Trotz der Rückführung des Zyklus'auf die Grundstrukturen Iteration und Rekursion war es sinnvoll, dafür eine eigene Grundstruktur einzuführen, weil die Erkennung und Behandlumg von Zyklen einen gesonderten Mechanismus erfordert, welcher elementar ist.

Die Rückführung auf

- Iteration
- Rekursion

erleichtert uns andererseits wieder das Leben, da wir uns nochmal voll den Unterschieden in der musikalischen Realisierung beider Strukturen widmen können.

Betrachten wir nocheinmal die rekursiven und iterativen Strukturen in den Abb.   und   , so unterscheiden diese sich ausschließlich durch die Rückkehrinformation. Wie wir bereits seit langem wissen, wird bei

- Rekursionen ein Keller aufgebaut
- Iterationen kein Keller aufgebaut.

Wie funktioniert nun das Aufbauen eines Kellers kompositionstechnisch?

Auch wenn ich jetzt Gefahr laufe, die eigene Domäne zu verlassen und mich auf das Gebiet der Kompositionstechnik zu wagen, will ich es trotzdem soweit tun, wie ich meine, mich noch sicher fühlen zu dürfen.

Betrachten wir und hierzu nocheinmal die obige rekursive Ableitungsregel

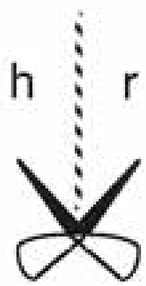
$$\begin{array}{ll} \text{R.1} & A_R \rightarrow h\,(A_R)\; r \\ \text{R.2} & A_R \rightarrow hr \end{array}$$

wobei wir nochmals zur Verdeutlichung der Rekursion die Klammerung angegeben haben.

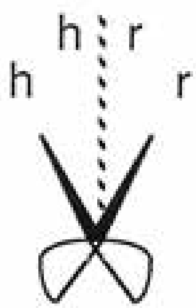
Wesentlich an der rekursiven Struktur ist, - wie wir oben bereits ausführlich behandelt haben, - daß diese einfachere Strukturen gleicher Art umschließt. Umschließen bedeutet musikalisch, daß ein Motiv,

$$A \rightarrow hr$$

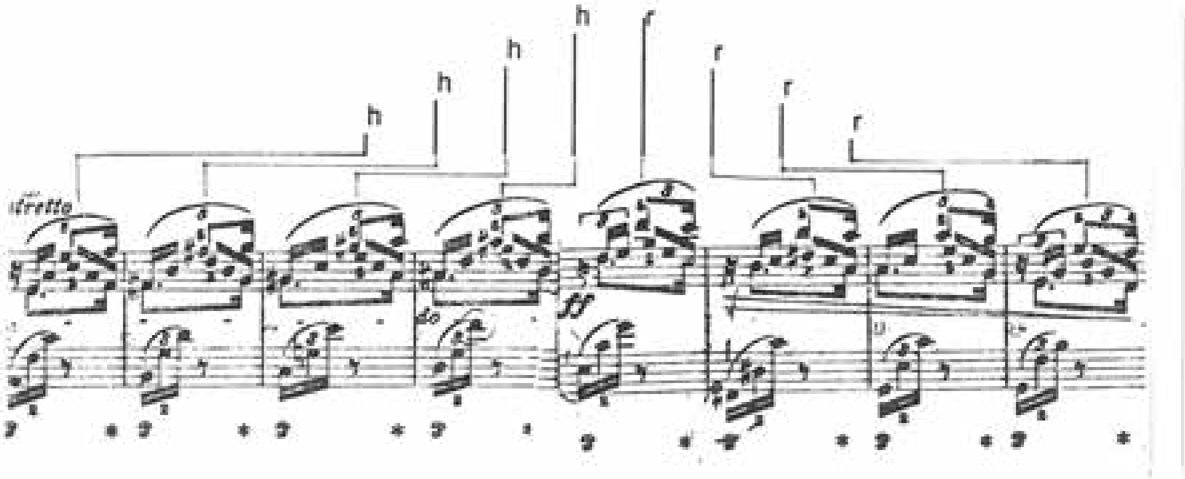
welches dem Hörer von vorher bekannt sein muß, in zwei Teile zerlegt wird, ein Anfangsmotiv, z.B. "h" und ein Endmotiv, z.B. "r".



Zwischen diese auseinandergetrennten Teilmotive muß die geschachtelte Figur eingefügt werden.



Dies geschieht sooft, bis das Ende der Rekursion erreicht ist. Sehen wir uns dies nochmals am Beispiel des 1. Préludes von Chopin an:



<u>Abb. 3.60:</u>

Beim Hörer bewirkt dieses Aufschneiden des bekannten Motivs, daß er, wie beim deutschen Schachtelsatz, einen Analysevorgang einleitet, bei welchem er die bereits gehörten Teilmotive auf dem Keller ablegt und auf die noch fehlenden, abgeschnittenen Teilmotive wartet. Sobald diese auftreten, werden die Teilmotive wieder paarweise vereinigt und der Keller wieder abgebaut, wie wir es in Abb. 3.42 im einzelnen dargestellt haben.

Damit der Hörer die Rekursionen erkennen kann und nicht etwa auf die Idee kommt, es handele sich hierbei doch um nichts anderes, als eine

Iteration der Form: h h h h r r r r

wird er doch weitere musikalische Attribute wie

- chromatische Aufwärtsbewegung
- unaufgelöste Akkorde
- Fortfall führender Pausen
- stretto
- crescendo

beim Aufbau, sowie

- diatonische Abwärtsbewegung
- Auflösungen
- Wiedereinführung führender Pausen
- normales Tempo
- diminuendo

unterstützt.

Sehen wir nun dieses Prinzip am Beispiel des rekursiven Zyklus aus dem 19. Prélude an:

Abb.3.61: Rekursiver Zyklus im 19. Prélude von Chopin

Auch hier besteht der Trick zur Realisierung der Rekursion - wie bereits erläutert - darin, das 3/8 - Motiv aufzuschneiden.

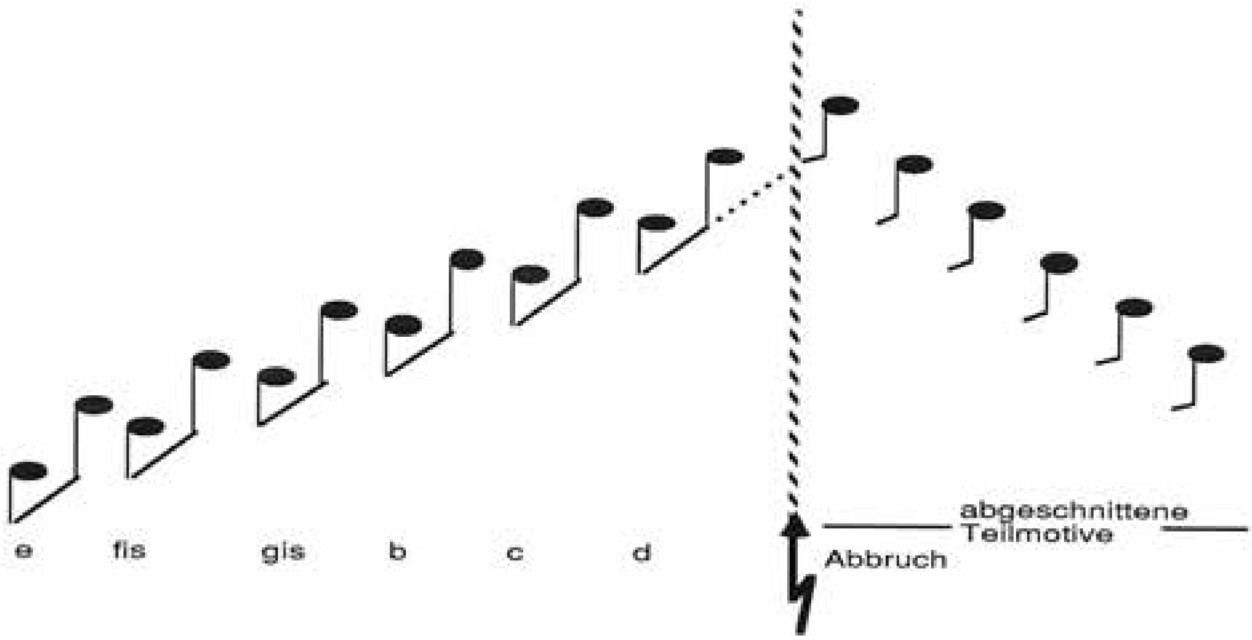


Abb. 3.62: Vervollständigung des rekursiven Zyklus'

Die abgeschnittenen Teilmotive sind in Abb. 3.62 ergänzt. Aufgrund des von Chopin verwendeten Zyklenbehandlungsmechanismus' bricht der Prozeß jedoch ab und setzt mit dem Thema frisch auf. Trotzdem handelt es sich um eine typische, rekursive Struktur, auch wenn diese nicht rekursiv verlassen wird. Der Hörer baut, noch unterstützt durch ein crescendo, einen Keller auf, der nach dem Abbruch gewaltsam wieder auf Null gesetzt wird. Die abgeschnittenen Teilmotive für die Rückkehr werden nicht mehr benötigt und sind verloren. -

Sind sie wirklich verloren?

Betrachten wir uns hierzu nochmals die Struktur nach dem Wiederaufsetzen in der "Nähe" des gefährlichen Labyrinthzyklus, so entdecken wir eine Motivfolge, die in verblüffender Weise den oben abgeschnittenen Teilmotiven gleicht.

Abb. 3.63: Nachgeholte (?) Rekursion im 19. Prélude von Chopin

Könnte es sein, daß Chopin tatsächlich die ursprünglich vorhandene Strukturinformation nicht weggeworfen hat, sondern sie beim zweiten Versuch dazu benutzt, um den Zyklus - chromatisch verkürzt - in der umgekehrten Richtung zu durchlaufen? Eine verwegene Hypothese, die der weiteren Überprüfung bedarf. Um diese vorzunehmen, dürfen wir es jedoch nicht bei der lokalen Rekursionsanalyse belassen, sondern müssen globalere Ableitungsstrukturen beachten. Dieses wollen wir jedoch späteren Kapiteln vorbehalten.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel eines rekursiven Zyklusses. Dieser stammt aus der 1. Etüde op. 10 von Chopin.

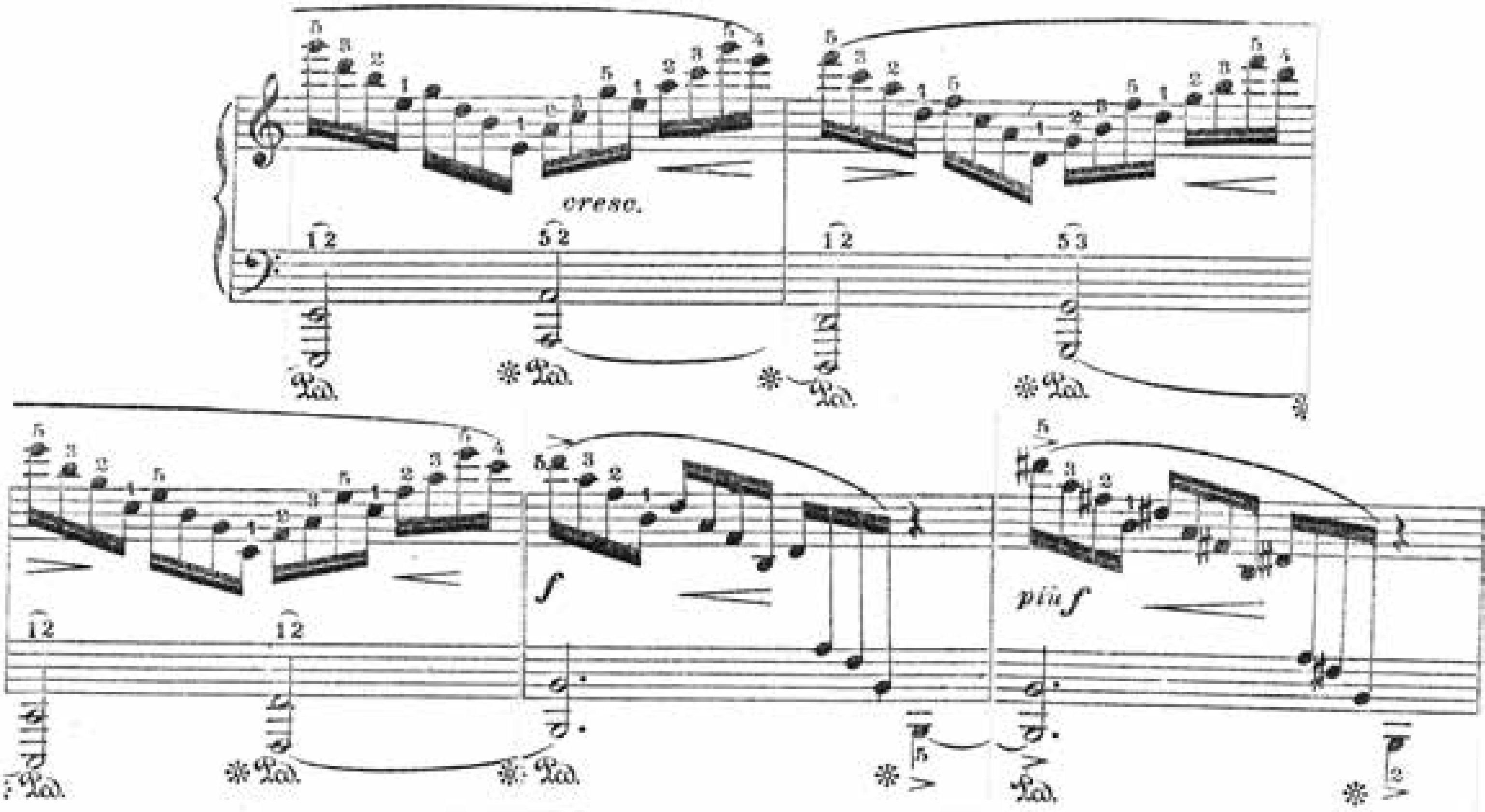


Abb. 3.64: Rekursiver Zyklus von der C-Dur Etüde op. 10, Nr. 1 von Chopin

Dieser Zyklus läßt sich leicht mit Hilfe eines "diatonischen Quintenzirkels" veranschaulichen.

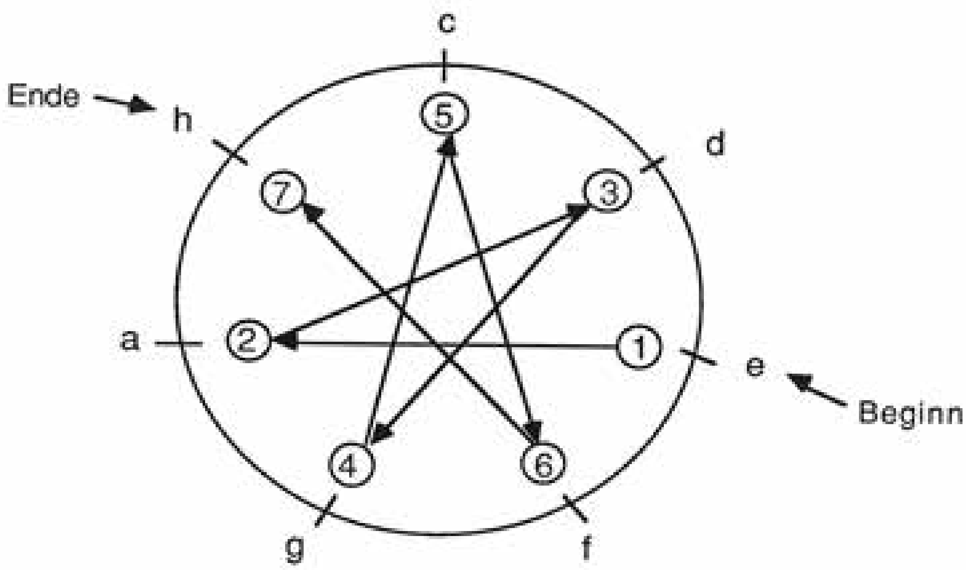


Abb. 3.65: Darstellung des Zyklus´ aus der 1. Etüde im Quintenzirkel

Wieso soll es sich hierbei um einen rekursiven und nicht um einen iterativen Zyklus handeln, wo wir doch bereits oben (s. Abb. 3.19 und 3.20) den Quintenzikel als Musterbeispiel einer harmonischen Iteration behandelt haben?

Die Begründung stützt sich auf den Eigenschaften der nichtrekursiven Figuren ab. Betrachten wir die Etüde in ihrem Grundaufbau, so erkennen wir Folgen von Aufwärts - und Abwärtssequenzen, welche jeweils 4-teilig sind. Hierfür könen wir, unter Verzicht auf die harmonischen Attribute, folgende, vereinfachte Ableitungsregeln angeben:

E_1-> $(HR)^*$	H = Aufwärtsfigur
	R = Abwärtsfigur
H -> h h h h	h = Aufwärtsmotiv
R -> r r r r	r = Abwärtsmotiv

Betrachten wir demgegenüber die entsprechenden, vereinfachten Ableitungsregeln für die rekursiven Zyklen

$$Z \;\text{->}\; Z_1 \;\text{->}\; R_r\, Z_2\, H_r$$
$$Z_2 \;\text{->}\; H_r\, Z_1\, R_r$$

mit den rekursiven, verkürzten Auf - bzw. Abwärtsfiguren

$$H_r \;\text{->}\; h\, h$$
$$R_r \;\text{->}\; r\, r$$

so erhalten wir folgende Ableitungen für den rekursiven Zyklus Z, wobei bei den Motiven zur Orientierung diesmal die harmonischen Attribute als Index mit angegeben sind.

$$Z \;\text{->}\; r_e\, r_e\, h_a\, h_a\, r_d\, r_d\, h_g\, h_g\, r_c\, r_c\, h_f\, h_f\, r_h\, r_h \quad \text{(Zyklenende)}$$

Aufgrund unseres motivischen Verkürzungskriteriums für die rekursive Schachtelung und die für Z angebbaren zyklischen Ableitungsregeln Z_1 und Z_2 wollen wir also annehmen, daß es sich bei dem Zyklus wirklich um einen vom Typ "rekursiv" handelt.

Wenn wir diesen Zyklus als Labyrinth darstellen, erhalten wir folgenden Graphen:

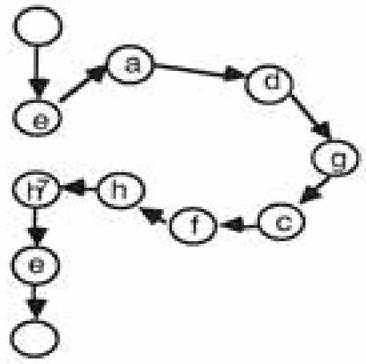


Abb. 3.66: Darstellung des Zyklus´ aus der 1. Etüde als Graph

Ganz ähnlich, wie im 19. Prélude wird in der 1. Etüde der Zyklus erkannt, der rekursive Prozeß hält ein bei dem Nebenvierklang auf

h $(CVII^7)$

welcher dann alteriert wird in den Septakkord

h (EV^7)

welcher wieder zum Thema zurückführt. Im Gegensatz zum 19. Prélude wird der Zyklus nicht durch Unterbrechung verlassen, sondern per Alterierung quasi "durch die Seitentür".

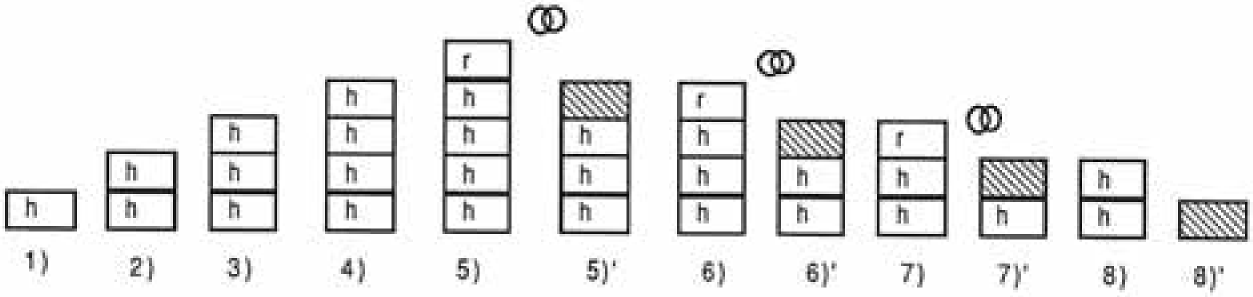
3. 7 Rekursionen und Höhepunkte

Wenn wir die bisherigen Beispiele rekursiver Strukturen nicht isoliert betrachten, sondern in den Gesamtzusammenhang des jeweiligen Musikstückes stellen, so fällt als Gemeinsamkeit auf, daß an diesen Stellen ein oder auch der Höhepunkt des Stückes erreicht wurde. Wenn wir uns fragen, wodurch dieser Eindruck bewirkt wird, so liegt dies sicher an Attributen, wie

- vorwärtsdrängend
- crescendo

u.a.

Der viel entscheidendere Grund liegt aber im Aufbau der Kellerstruktur, den der Hörer als sehr viel stärkere Spannung empfindet, als bei der Analyse einer nichtrekursiven Struktur. Das folgende Bild zeigt zur Erinnerung nochmal den Verlauf des Kellerstandes beim Hören der Rekursion des 1. Préludes.



Wiederholung Abb. 3. 42: Auf- und Abbau des Kellers bei der Rekursion des 1. Préludes.

Wie wir später noch bei der genaueren Analysye "normaler" Ableitungsstrukturen wie z.B. der Kadenz sehen werden, kann man mittels Rekursionen sehr viel höhere Keller aufbauen. Wie hoch man solche Kellerinhalte musikalisch aufschichten kann, ohne daß sie einstürzen, wollen wir später noch an geeigneten Beispielen untersuchen.

Vorläufig wollen wir jedoch festhalten:

Rekursionen realisieren Höhepunkte

Diese Feststellung können wir auch umkehren und uns sehr schnell zunutze machen.

Höhepunkte implizieren Rekursionen

Wenn wir also, was wir noch zu Beginn des Abschnitts 3. 5. 4. 2 "Musikalische Rekursion" als Problem dargestellt haben, nach weiteren Beispielen für Rekursionen suchen wollen, sollten wir uns zielstrebig auf die Höhepunkte eines Werkes konzentrieren und diese genauer unter die Lupe nehmen.

Einige Resultate dieses Vorgehens sind im Folgenden zusammengestellt und sollen einzeln näher erläutert werden.

Bleiben wir vorläufig noch bei Chopin. Im 16. Prélude findet man kurz nach Beginn die erste Rekursion:

Abb. 3. 67:

Abb. 3.68: erste Rekursion im 16. Prélude von Chopin

Man erkennt die Rekursion an den abgebrochenen und immer wieder neu aufsetzenden Aufwärtsläufen, die in eine symmetrische Abwärtsfolge einmünden. Im einzelnen herrscht folgende Zuordnung, wobei zur Abwechslung die noch dramatischere Version der Anfangsrekursion in den Takten 23 bis 25 betrachtet wird.

Abb. 3.69: Gesteigerte Version der Anfangsrekursion im 16. Prélude von Chopin

Abb. 3.69: Rekursiver Zyklus im 16. Prélude

Wenn man das 16. Prélude insgesamt analysiert, was einem späteren Kapitel vorbehalten sein soll, wimmelt es darin nur so vor rekursiver Strukturen. Die oben aufgestellte Behauptung, Rekursionen realisierten Höhepunkte, bewahrheitet sich gerade besonders schön beim 16. Prélude, denn diese zählt zu den dramatischsten Werken Chopins überhaupt.

3. 8 Rekursion und Verkürzungen.

In der klassischen Musikanalyse wird üblicherweise die *Verkürzung* oder *Verdichtung* als Kompositionstechnik zum Aufbau von Höhepunkten angeführt ([Ratz73], [Bren77]). In [Ratz73] heißt er beispielsweise hierzu:

> "Der achttaktige Satz (2 x 2) + 4 besteht aus einem Zweitakter, seiner Wiederholung und einer viertaktigen Entwicklung, deren Wesen darin besteht, daß ein Teil der im Zweitakter exponierten Motive fallen gelassen und so eine Verdichtung und Beschleunigung der musikalischen Darstellung erzielt wird."

sowie weiter unten:

> "Dieses Immer - kleiner - werden der Einheiten bewirkt eben die dramatische Steigerung zu dem Höhepunkt hin".

Was stimmt denn nun?

- Werden Höhepunkte durch

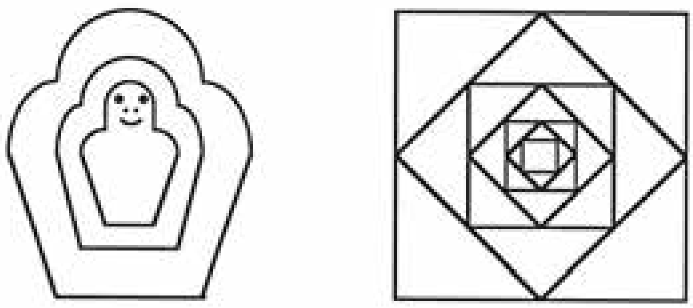
  • **Rekursionen,**

  wie die ganze Zeit behauptet, oder durch

  • **Verkleinerungen**

  bewirkt, wie gerade zitiert?

Bevor wie diese Frage beantworten, wollen wir zunächst nochmal auf unsere erste Veranschaulichung einer Rekursion, die russischen Puppen zurückgreifen (s. Abb. 3.70 a)).



a) Russische Puppen

b) geschachtelte Quadrate

Abb. 3. 70: Veranschaulichung von Rekursionen

Sofort sehen wir einen ersten Zusammenhang: Natürlich werden die inneren Puppen immer kleiner, denn sonst ließen sie sich nicht ineinanderschachteln! Betrachten wir noch ein weiteres Beispiel (Abb. 3.70b)): auch bei den ineinandergeschachtelten Quadraten müssen die inneren Figuren notwendigerweise immer kleiner werden.

Doch Vorsicht - wie ist es denn bei den Schachtelsätzen der natürlichen Sprache? Wie wir oben gesehen haben, ist über die Länge der innersten Sätze nichts ausgesagt. Diese könnten also durchaus länger als die sie umschließenden äußeren Teilsätze sein. Trotzdem stellt man jedoch bei der Analyse realer gesprochener oder auch geschriebener Sätze fest, daß tatsächlich die inneren Sätze meist kürzer sind, als die äußeren.

Der Grund hierfür ist ebenfalls ein ganz realer: Der Kellerspeicher, der bei der Analyse von Schachtelsätzen aufgebaut wird, unterliegt dem Phänomen der menschlichen Vergeßlichkeit. Wenn die Schachtelung zu tief und die geschachtelten Sätze zu lang werden, vergißt der Hörer oder auch Sprecher einen Teil der Kellerinhalte und bringt den Satz nicht mehr richtig zu Ende. Hieraus können wir ableiten, daß eine Verkleinerung zwar nicht sein muß, aber den Analysevorgang erleichtert. Ähnliches hatten wir bereits musikalisch festgestellt am Beispiel des 1. Préludes mit

- stretto
- Fortfall der $^1/_{16}$ -Pause
  etc.

wo wir die Notwendigkeit zur Kenntlichmachung der Rekursion gegenüber der Iteration diskutiert hatten.

Wir können also festhalten:

Rekursionen werden oft in Form von Verkleinerungen realisiert.

Wenn wir dies so akzeptieren, dann stellt sich sofort die Frage nach dem Umkehrschluß:

Realisieren Verkleinerungen dann vielleicht Rekursionen?

Die Antwort lautet:

Ja, in den meisten Fällen.

Hierfür muß natürlich der Beweis erbracht werden.

Bevor dies geschieht, muß jedoch zunächst folgender, wesentlicher Unterschied zwischen

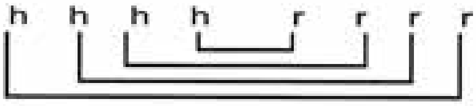
- Rekursionen

und

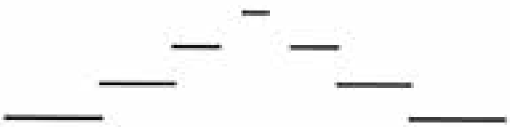
- Verkleinerungen

wie sie zitiert wurden, erläutert werden.

Während wir bei der Rekursion geschachtelte Ausdrücke der Form



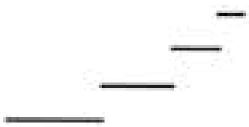
oder als geschachtelte Strecken, veranschaulicht in der Form



vorliegen haben, geht man bei Verdichtungen von Ableitungen der Form

h h' h'' h'''

aus, bzw. durch Strecken veranschaulicht:



Der wesentliche Unterschied ist also der, daß bei der Rekursion das innerste Element von dem es umschließenden gefolgt wird, während bei der Verdichtung die Struktur beim innersten Element endet.

Dies würde bedeuten, daß die Verkürzungen, wenn es sich um Rekursionen handelt, anders, als oben zitiert interpretiert werden müßten.

Dieses wollen wir an einem klassischen Beispiel untersuchen, welches sowohl in [Ratz73] als auch in [Bren77] behandelt wird (s. Abb.3.71)

Abb. 3. 71: Hauptthema der Sonate op. 2 Nr.1 von Beethoven (1. Satz)

In [Bren77] heißt es hierzu:

> "Nun möchte ich die versprochenen Beweise bringen. Wenn wir die ersten Sätze der Sonaten betrachten, die zumeist in Sonatenform stehen, dann fällt uns auf, daß Beethoven seine Hauptthemen gewöhnlich nach einem Prinzip aufbaut, daß ich als *Verkürzung* oder *Verdichtung* bezeichnen will. Das Hauptthema der ersten Sonate op. 2, Nr.1 ist ein leicht faßbares Beispiel: " (s. Abb. 3. 71)

> "Die Aufeinanderfolge der Harmonien bis zur Fermate verdichtet sich darin nach folgendem Schema: 2 mal 2 Takte, 2 mal 1 Takt, 3 mal 1/2 Takt. Hinzu treten Verkürzungen motivischer und rhythmischer Natur. Nur beherrscht dieseTechnik nicht nur den Themenbau, sondern die Organisation des ganzen Satzes."

Versteht man im Gegensatz dazu dieses Thema als rekursive Struktur, so gelangt man zu folgender Ableitungsstruktur

$T_1 \to A\ \ H\ \ H\ \ R$	A	Auftakt
	H	Hauptmotiv
$H \to H_1\ H_2$	R	Rekursion
$R \to H_2\ R\ H_1$	H_1	1. Hälfte Hauptmotiv
$R \to \varepsilon$	H_2	2. Hälfte Hauptmotiv

wobei die Zuordnung der Metavariablen (Nichtterminale) zu dem Notentext in der folgenden Abb. eingetragen ist.

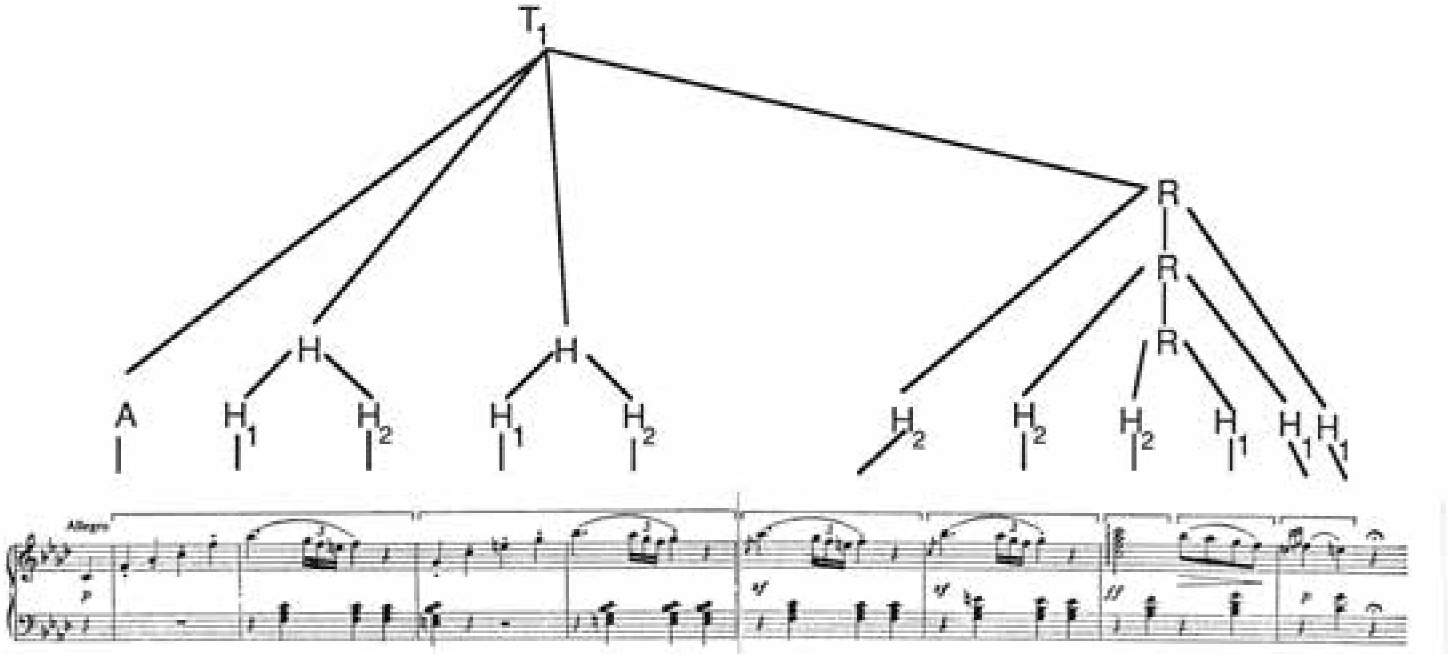


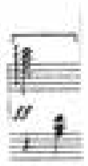
Abb. 3. 71: Rekursive Ableitungsstruktur des Hauptthemas der Beethoven-Sonate op. No. 1 (1. Satz)

Der wesentliche Unterschied ist unmittelbar ersichtlich:

- Das Hauptmotiv H mit seinen beiden Teilmotiven H_1 und H_2 wird zunächst einmal vorgestellt, (Takte 1 bis 4), wie wir es oben bereits mehrmals an anderen Beispielen (Mozart A - Dur - Sonate u.a.) behandelt haben.

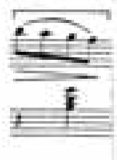
- Die Rekursion ist dreifach geschachtelt und beginnt mit der ersten Schachtelung in Takt 5 mit der 2. Hälfte H_2 des Hauptmotives.

- Die innerste Rekursion und damit der Höhepunkt des Themas liegt auf dem arpeggierten f - moll Akkord in Takt 7, (1. Takthälfte)



  Das Motiv H_2 ist durch die mit der Rekursion verbundene Verkürzung entartet zu einem einzigen Akkord, wobei die Arpeggierung an die ursprünglich vorhandenen Töne erinnert (Vorschlag, umspielte Nebennote).

- Der Abbau der Rekursion beginnt im 7. Takt in der 2.Takthälfte mit dem absteigenden Motiv.



  Dieses ist nichts anderes als eine abwärtsgerichtete, verkürzte Ausprägung des Teilmotivs H_1

- Die nächste Ausprägung des Teilmotivs H_1 tritt in Takt 8, 1. Viertel, auf,

wobei die Umspielung sich aus den ursprünglich vorhandenen 4 Motivnoten ableitet. Die Verkürzung stellt dabei im Zuge des Auslaufens der Rekursion eine Beruhigung dar.

- Die Rekursion endet in Takt 8, auf dem 2. Taktteil mit einer weiteren Vereinfachung des Teilmotives zu einer einfachen Note mit anschließender Fermate.

Um die Rekursivität der Struktur zu überprüfen, können wir den Test durchführen, den wir bereits einmal bei dem 1. Prélude angewendet haben: Wir sortieren die Motive so um, daß die zusammengehörenden auch zusammen gespielt werden (s. Abb. 3. 72).

Abb. 3. 72: Überprüfung der Rekursion durch Umsortierung der Motive

Wir stellen fest, daß diese harmonisch in der Tat logisch aufeinander folgen. Wir stellen weiterhin fest, daß dabei der Eindruck des Höhepunktes, welcher eben gerade für die Rekursion charakteristisch ist, stark reduziert ist.

Falls wir immer noch im Zweifel sind, können wir Beethoven, bzw. den Notentext selbst befragen: Dieser markiert den Höhepunkt der Rekursion durch ein ff und zeigt das Zurücklaufen durch ein diminuendo bis zum p an, der Dynamik zu Beginn der Rekursion, welches dann in der Fermate verklingt.

Dem aufmerksamen Leser wird dabei folgendes nicht entgangen sein: Wir haben, um die Rekursion formal zu begründen, einen Trick angewendet und geschrieben:

$$R \rightarrow H_2\ R\ H_1$$

statt, wie man vielleicht erwartet hätte

$$R \rightarrow H_1\ R\ H_2$$

wie wir es bisher immer dargestellt haben.

Zur Erläuterung, daß unser Trick erlaubt war, wollen wir uns nocheinmal die motivische Ableitungsfolge ansehen. Wir können schreiben:

$$T \rightarrow A\ H\ H\ R$$

$$\rightarrow A\ H_1\ \underbrace{H_2\ H_1}_{\substack{\text{Umdeutung}\\ \text{der}\\ \text{Reihenfolge}}}\ H_2\ R$$

Wie wir sehen, besteht der Trick darin, die Motive einfach zeitverschoben um 1 Takt miteinander zu verbinden, welches dann das Basisthema der Rekursion bildet, quasi als auf den Kopf gestelltes Hauptthema. Für dieses Umdrehen der Motive, besser das Umdeuten der Reihenfolge, welches der Hörer ohneweiteres (indeterministisch) mitvollzieht, gibt es beliebig viele Beispiele in der Literatur, von denen wir uns nachher noch ein einfaches ansehen wollen. Nachdem wir mit diesem Beispiel einen ersten Versuch erfolgreich, so meinen wir, bestanden haben, die Rekursion als Vervollständigung des bisherigen Verkürzungsparadigmas einzuführen, wollen wir, um die Bedeutung dieses Vorgangs zu ermessen, weiter aus [Bren77] zitieren:

> "Die Verkürzungstechnik läßt sich, zumindest in Ansätzen, über Mozart und Haydn bis zu Bach und zur barocken Chaconne zurückverfolgen. Obwohl sie in zeitgenössischen Lehrbüchern meines Wissens nicht zur Sprache kommt, muß sie musikalisches Allgemeingut gewesen sein. - selbst Diabellis Walzerthema, das Beethoven für sein größtes Variationenwerk verwendete, ist ja in dieser Technik angefertigt.[1)] Niemand hat jedoch die Verkürzung so konsequent benutzt und sie in einem solchen Maße differenziert wie Beethoven. Ich wage zu behaupten, daß sie die treibende Kraft seiner Sonatenformen ist und ein Grundprinzip seines musikalischen Denkens. (Später werde ich mehr über das Funktionieren dieser Technik sagen.) Sie gibt Beethovens Musik das Unentrinnbare, dynamisch Vorwärtsweisende, sie läßt uns einen Vorgang erleben, während Schuberts Musik oft eher wie ein Zustand auf uns wirkt, wie eine Reihe geheimnisvoll miteinander kommunizierender Episoden. Dementsprechend erfindet Schubert seine Themen nicht selten als Periode bzw. Lied."

-1) Ohne die Verkürzungsvorgänge des Themas hätte Beethoven das Werk wohl kaum komponiert. Sie, und nicht der melodische Aufbau, die Folge der Harmonien oder die Baßlinie, bilden den gemeinsamen Nenner, der alle 33 Veränderungen zusammenhält."

Ganz offensichtlich tut sich hier ein ungeheueres Betätigungsfeld für die weitere Analyse rekursiver Strukturen in der gesamten Musikliteratur auf.

Literaturverzeichnis

[AuTü70]	Autorengruppe Tübingen:	"TSG-Transformationelle Schulgrammatik - erster Versuch", Verlag Alfred Kümmerle, Göppingen, 1970.
[BaCo79]	Barrett, W. A: Couch, I. D.	"Compiler Construction - Theory and Praxis" Science Research Associates, USA, 1979.
[Bern76]	Bernstein, L.:	"Musik - die offene Frage" Wilhelm Goldmann Verlag, München, Musikverlag B. Schott's Söhne Mainz, 1985.
[Bren77]	Brendel, A.:	"Nachdenken über Musik" Piper - Verlag, München, Zürich, 1977.
[Chom57]	Chomsky, N.:	"Syntactic Structures" Mounton, Den Haag, Paris, 1971.
[Chom71]	Chomsky, N.:	"Aspekte der Syntax - Theorie" Suhrkamp Verlag, Frankfurt , 1971.
[Grab67]	Grabner, H.:	"Handbuch der funktionellen Harmonielehre" Gustav Bosse Verlag, Regensburg, 1977.
[Herz57]	Herzfeld, F.:	"Lexikon der Musik" Ullstein Verlag, Berlin, 1957.
[Hof79]	Hofstadter, D. R.:	"Gödel, Escher, Bach - ein Endlos Geflochtenes Band" Klett - Cotta, Stuttgart, 1986.
[LeiGi31]	Leimer, K.: Gieseking, W.	"Modernes Klavierspiel nach Leimer - Gieseking" Verlag B. Schott's Söhne, Mainz,1931, neu 1959.

[Mesch84] Meschkowski, H.: "Was wir wirklich wissen - die exakten Wissenschaften und ihr Beitrag zur Erkenntnis"
Piper Verlag,
München, Zürich, 1984.

[Mi85] Michels, U.: "dtv - Atlas zur Musik "- Bde. 1 u. 2
Deutscher Taschenbuch Verlag
München
Bärenreiter Verlag, Kassel, Basel,
Tours, London, 1977, 1985.

[Nils65] Nilsson, N. J.: "Learning Machines"
McGraw - Hill Book Company,
New York, London, 1965.

[Pop71] Popper, K. R.: "Objektive Erkenntnisse, - ein evolutionärer Entwurf"
Hoffmann und Campe Verlag,
Hamburg , 1984.

[Ratz73] Ratz, E.: "Einführung in die musikalische Formenlehre"
Universaledition,
Wien, 1973.

[RU76] Rubinstein, A.: "Erinnerungen - Die frühen Jahre"
Fischer Verlag,
Frankfurt a. M., 1976.

[Win82] Winograd, T.: "Language as a Cognitive Process",
Volume 1 : Syntax,
Addison - Wesley Publ. Comp.
Reading, Massachusetts, 1983.

Personenregister

Sachregister